Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Polynômes (les Classics)

Polynômes de Bernouilli

Polynômes de Laguerre

Polynôme de Tchebychev et approximation uniforme

Polynômes de Bernstein

Polynômes de Legendre

Interpolation et polynômes factoriels

Polynômes de Bernouilli

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Objectifs

Le fil conducteur de ce sujet est le calcul approché d'intégrales.

La partie I est indépendante des autres parties. À travers l'exemple de l'intégrale de Gauss, on utilise des suites de fonctions et on « permute limite et intégrale ».

Les parties II et III peuvent être traitées de manière indépendante. La partie IV utilise des résultats des parties II et III.

Les parties II, III et IV traitent de l'utilisation des polynômes interpolateurs pour le calcul approché d'intégrales : on présente le principe des méthodes de quadrature, dites de Newton-Cotes, ainsi qu'un raffinement avec la méthode de quadrature de Gauss.

Le sujet comporte aussi quelques questions notées *Informatique* portant sur le programme «informatique pour tous». Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage Python.

Notations

— Si f est une fonction réelle bornée sur $[a, b]$ avec $a < b$, on pose :

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

— On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

On considère l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.$$

Q2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|I - s_n| \leqslant \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}.$$

Q3. *Informatique* : écrire une fonction récursive `factorielle` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie l'entier $n!$.

Q4. *Informatique* : en déduire un script, qui détermine un entier N, tel que $|I - s_N| \leqslant 10^{-6}$.

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Q5. Déterminer, en détaillant, la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leqslant e^{-x^2}$.
En déduire que :

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.$$

Partie II - Notion de polynôme interpolateur

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts.

On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.

II.1 - Existence du polynôme interpolateur

Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

On pose :

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(X).$$

Q7. Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

II.2 - Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q8. *Informatique* : si $y_0, \ldots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x = [-1, 0, 1]` et `y = [4, 0, 4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi, `lagrange(x, y, 3)` renverra 36.

Q9. *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \ldots, a_n$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(x_0) & = & f(x_0) \\ \vdots & & \\ P(x_n) & = & f(x_n) \end{array}\right. \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$.
Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

II.3 - Expression de l'erreur d'interpolation

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.

On note $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par :

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a, b]$, la propriété suivante notée $\mathcal{P}_x$:

$$\exists c_x \in]a, b[, \quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x).$$

Q10. Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q11. Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathcal{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a, b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a, b]$ une application F par :

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t).$$

Q12. Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q13. Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathcal{P}_x$ est vraie.

Q14. Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que :

$$\|f - L_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty .$$

Q15. En déduire que si f est la fonction sinus, la suite $(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Q16. On définit f sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide d'une série entière que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left\|f^{(2k)}\right\|_\infty \geqslant (2k)!.$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Ceci est appelé le phénomène de Runge.

Partie III - Famille de polynômes orthogonaux

On munit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

pour tout polynôme P et Q de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$ de $\mathbb{R}[X]$. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \ldots)$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Vect}\{1, X, \ldots, X^k\} = \mathrm{Vect}\{P_0, P_1, \ldots, P_k\}.$$

Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

Q17. Calculer P_0 et P_1.

Q18. Justifier que pour $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.

On prend $n \geqslant 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

Q19. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1, 1]$.

Supposons par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racines simples. Si P_n admet des racines $t_1, \ldots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\ldots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

Q20. Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{1} H(t)\,\mathrm{d}t = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1, 1]$).

Partie IV - Méthodes de quadrature

Dans cette partie, nous allons voir comment les polynômes interpolateurs de Lagrange peuvent être utilisés pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour cela, on choisit d'abord une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. À cause du phénomène de Runge, si N est grand, le polynôme interpolateur de f aux points x_i n'est pas forcément une bonne approximation de f. Approximer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par $\displaystyle\int_a^b L_N(f)(x)\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas forcément pertinent...

Nous allons en fait approximer f par un polynôme d'interpolation sur chaque petit intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Q21. Justifier que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } g(t) = f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right).$$

On est donc ramené à estimer $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ où $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

On se donne $n+1$ points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ dans $[-1,1]$, deux à deux distincts.

On rappelle que $L_n(g) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g(t_i) l_i(X)$ est le polynôme interpolateur de g aux points t_i et on pose :

$$J(g) = \int_{-1}^{1} L_n(g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i) \text{ avec } \alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lorsqu'on approxime $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ par $J(g)$, c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i g(t_i),$$

on dit que J est une méthode de quadrature associée aux points $t_0, \ldots, t_n$ et aux poids $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Q22. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

On dit que la méthode de quadrature J est d'ordre au moins n car la formule approchée est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Q23. Exemple : on prend $n = 1$, $t_0 = -1$ et $t_1 = 1$. Déterminer α_0 et α_1. Expliquer à l'aide d'un graphique en prenant g positive pourquoi, dans ce cas, la méthode J s'appelle la « méthode des trapèzes ».

Quadrature de Gauss

Dans les deux questions suivantes, on prend pour points d'interpolation $t_0, t_1, \dots, t_n$ les $(n+1)$ racines du polynôme de Legendre P_{n+1} introduit dans la partie III.

Nous allons démontrer que, dans ce cas, la formule de quadrature J est d'ordre au moins $2n + 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On fait la division euclidienne de P par P_{n+1}, on note respectivement Q le quotient et R le reste de cette division :

$$P = QP_{n+1} + R.$$

Q24. Démontrer que $J(QP_{n+1}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t$, puis conclure que $J(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$.

Q25. Démontrer que les poids $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ associés à la quadrature de Gauss sont strictement positifs et calculer leur somme.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1052 – D'après documents fournis

Polynôme de Tchebychev et approximation uniforme

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels en l'indéterminée X. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur à $n \in \mathbb{N}$.
On identifiera polynôme et fonction polynomiale définie sur $[-1,1]$.

On rappelle que toute fonction réelle f continue sur $[-1,1]$ est bornée car continue sur un segment, on convient alors de noter $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ dont l'existence dans $\mathbb{R}$ est assurée par l'argument précédent.

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

1.a Simplifier $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ et $f_3(x)$.
Représenter sur un même graphique ces applications.

1.b Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in [-1,1]$:

$$f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$$

1.c En déduire qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1], T_n(x) = f_n(x)$$

Calculer T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4.

2.a Quel est le degré de T_n ?
Quel est son coefficient dominant ?

2.b Déterminer les racines de T_n qui appartiennent à $[-1,1]$.
Combien y en a-t-il ?
Comment justifier que celles-ci sont simples et qu'il n'y en a pas d'autres ?

2.c Etudier la parité du polynôme T_n en fonction de la parité de l'entier n.

3.a Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.

3.b En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x| \le 1 \Leftrightarrow |T_n(x)| \le 1$.

On suppose désormais que n est un entier naturel non nul.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|T_n(x)| = 1$. On précisera le nombre de racines distinctes et la position relative des racines des équations $T_n(x) = 1$ et $T_n(x) = -1$.

5. On pose $\tilde{T}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$ et on note P_n l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ de degré exactement égal à n. Il est entendu que $\tilde{T}_n \in P_n$.

5.a Calculer $\|\tilde{T}_n\|$.
On désire établir que $\tilde{T}_n$ est un polynôme de P tel que la quantité $\|\tilde{T}_n\|$ soit minimale. Pour cela on raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe P polynôme appartenant à P_n tel que $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

5.b On pose $D = \tilde{T}_n - P$. Que dire du degré de D ?

5.c Etudier le signe de $D\left(\cos \dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0,1,\dots,n\}$ et conclure.

Partie II

Soit n un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des points deux à deux distincts du segment $[-1,1]$. On pose pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$: $L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$.

1.a Quel est le degré de L_k ?

1.b Calculer $L_k(a_i)$ pour tout $i \in \{0,1\ldots,n\}$, $i \neq k$.
Calculer aussi $L_k(a_k)$.

1.c Montrer que la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On se donne une fonction réelle f définie sur $[-1,1]$, et on pose :

$$P = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) L_k$$

Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n\}$: $P(a_i) = f(a_i)$. On dit que P est le polynôme interpolateur de la fonction f aux points $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

On désire maintenant évaluer la qualité de l'approximation réalisée lorsqu'on approche la fonction f par le polynôme P défini ci-dessus. Pour cela on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et on pose $\Pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(X-a_i)$.

3. Soit $x \in [-1,1]$. On désire établir l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que :

$$f(x) - P(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

3.a On suppose $x \in \{a_0, \ldots, a_n\}$. Etablir le résultat.

3.b On suppose $x \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$ et on introduit la fonction F définie par :

$$F(t) = f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$$

avec K constante réelle choisie de sorte que $F(x) = 0$.
Justifier l'existence de la constante K et observer que F possède au moins $n+2$ valeurs d'annulation distinctes. En déduire l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ et conclure.

3.c En déduire que $\|f-P\| \leq \frac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|$.

4. Comment doit-on choisir les points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ pour que $\|\Pi_{n+1}\|$ soit minimale ?

Polynômes de Bernstein

Soit n un entier naturel. On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 1 à n.
On appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes réels:

$$B_{n,k}=\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} \text{ avec } k\in\{0,1,\ldots,n\}$$

Dans tout le problème, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I : Polynômes de Bernstein

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $x\mapsto B_{3,k}(x)$ pour $k=0,1,2,3$ et $x\in[0,1]$.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}$. En déduire que pour tout $x\in[0,1]$, $0\leq B_{n,k}(x)\leq 1$.

2.b Calculer $\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}$, $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}$ puis $\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}$.

3. Exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ pour $n\geq 1$.

4. Etablir que la famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $B(P)=\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}$.

5.a Montrer que B est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.b Déterminer le noyau de B. Qu'en déduit-on ?

Partie II : Théorème de Weierstrass

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose P_n la fonction définie par : $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)$.

1. Calculer $P_n(x)$ lorsque $f(x)=1$, $f(x)=x$ et $f(x)=x^2$.
Vérifier qu'à chaque fois $P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$ pour tout $x\in[0,1]$.

2. On se propose de généraliser le résultat ci-dessus au cas général $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue.

2.a Calculer $\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2B_{n,k}(x)$.

2.b Soit $x\in[0,1]$ et $\varepsilon>0$. La fonction f étant continue en x :

$$\exists\alpha>0\,,\forall t\in[0,1]\ :\ |x-t|\leq\alpha\Rightarrow|f(x)-f(t)|\leq\varepsilon/2\,.$$

On pose $A=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|<\alpha\right\}$ et $B=\left\{k\in[\![0,n]\!]/\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\alpha\right\}$.

Montrer que $\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\leq\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$.

2.c En déduire que $|P_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$ avec $M=\sup_{[0,1]}|f|$.
Conclure que $P_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand $n\to+\infty$

3.a Etablir que $P'_n(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$.

3.b En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, P_n est croissante sur $[0,1]$.

Partie III : Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier sont couramment utilisées en DAO, car elles permettent de construire des courbes régulières satisfaisant des contraintes géométriques simples.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

L'utilisateur se donne une famille de $n+1$ points distincts $(P_k)_{0\leq k\leq n}$.

La courbe de Bézier définit par ces points est la courbe de point courant $M(t)$ ($t\in[0,1]$) déterminé par :

$M(t)$ est le barycentre des points $P_0,P_1,\ldots,P_n$ affectés des masses $B_{n,0}(t),B_{n,1}(t),\ldots,B_{n,n}(t)$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ en fonction des $\overrightarrow{OP_k}$ est des $B_{n,k}(t)$.

2. Dans le cas $n=3$, on considère les points $P_0\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$, $P_1\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$, $P_2\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ et $P_3\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$.

   Représenter la courbe de Bézier correspondante.

3. On revient au cas général.

3.a Préciser les points $M(0)$ et $M(1)$.

3.b On suppose $P_1\neq P_0$. Montrer que la tangente en $M(0)$ passe par P_1.

De même, lorsque $P_{n-1}\neq P_n$, on observe que la tangente en $M(1)$ passe par P_{n-1}.

Ainsi, lors de la construction d'une courbe de Bézier, l'utilisateur détermine les extrémités et y précise les tangentes.

Polynômes de Legendre

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réel en l'indéterminée X et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal n.
On identifiera polynôme et fonctions polynomiales associées définies sur $[-1,1]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\dfrac{\mathrm{d}^k P}{\mathrm{d}x^k}$ la dérivée k ème d'un polynôme P.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynomiales définies sur I par :

$$U_n(x) = (x^2-1)^n \text{ et } P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}(x)$$

En particulier, avec les conventions usuelles : $U_0(x) = P_0(x) = 1$.
A toute fonction polynomiale P, on associe le polynôme $L(P)$ définie sur I par :

$$L(P)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)$$

Partie I

Pour $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(.\mid.)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans tout le problème, on suppose $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire et on note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
2. Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. On note L_n la restriction de l'endomorphisme L au départ de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.b Calculer $L_n(1)$, $L_n(X)$ et $L_n(X^k)$ pour tout $2 \le k \le n$.

3.c Former la matrice de L_n relativement à la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Soit $P,Q \in \mathbb{R}[X]$. Observer que $(L(P) \mid Q) = (P \mid L(Q))$.

Partie II

1.a Calculer directement P_1, P_2 et P_3.

1.b Montrer que P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

1.c Justifier que $P_0, P_1, \dots, P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer : $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$, établir que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

   et en déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3.a Vérifier les relations :

(1) : $U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0$,

(2) : $(x^2-1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0$.

3.b En dérivant $n+1$ fois (1) et (2), montrer que la suite (P_n) vérifie :

(3) : $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$,

(4) : $L(P_n) = n(n+1)P_n$.

3.c En exploitant la relation (4) et le résultat de la question I.4, établir que si $m \neq n$, $(P_n \mid P_m) = 0$.

4.a Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P_{n+1} \mid Q) = 0$.

4.b En introduisant un polynôme Q de la forme $\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$ montrer que le polynôme P_{n+1} possède exactement $n+1$ racines distinctes, toute dans l'intervalle $]-1,1[$.

5.a Montrer que $(P'_{n+1} \mid P_n) = (n+1)\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$.

5.b A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\|P_n\|^2 = 2 - 2\int_{-1}^{1} xP_n(x)P'_n(x)\mathrm{d}x$.

5.c En déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$.

6. Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, on note $d(P,F)$ la distance de P au sous-espace vectoriel F .
Calculer $d(X^{n+1}, \mathbb{R}_n[X])$.

Interpolation et polynômes factoriels

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } T(f)(x) = f(x+1).$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1} \text{ et } T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

2. On note Δ_n la restriction de Δ au départ de E_n.

2.a Vérifier que Δ_n réalise un endomorphisme de E_n.

2.b Déterminer $\ker \Delta_n$.
En déduire le rang de Δ_n et déterminer $\mathrm{Im}\,\Delta_n$.

3. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme Δ est surjectif.

Partie II

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

2. $$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1 \text{ et } N_k(x) = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}.$$

1.a Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction de l'un des polynômes $(N_j)_{j \geq 0}$.

1.b Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

2.a Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de E_n.

2.b Soit $P \in E_n$, P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + ... + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. Applications :
   On pose $P(x) = x^2$. Déterminer les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \; : \; P(x) = aN_0(x) + bN_1(x) + cN_2(x)$$
   et en déduire une fonction polynôme Q telle que $\Delta(Q) = P$.
   Exploiter celle-ci pour exprimer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit $f \in \mathcal{F}$.

4.a Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $(T^k(f))(x)$.

4.b Etant donné $n \in \mathbb{N}$, expliciter $\Delta^n(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq n$.

(on pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).

4.c En déduire que $(\Delta^n(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0,1,\ldots,n$.

Partie III

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}):\begin{cases}\deg P \le n\\ \forall k\in\{0,1,\ldots,n\}, P(k)=f(k)\end{cases}$$

On pose :

$$N(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-j)=x(x-1)\ldots(x-n) .$$

1. Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned}\varphi : E_n &\to \mathbb{R}^{n+1}\\ P &\mapsto (P(0),\ldots,P(n))\end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

1.b En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f .

2.a Pour $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j .

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_{n+1}=\sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t\in[0,n]\right\} .$$

3.a Soit $x\in[0,n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists \xi\in[0,n], f(x)-P_f(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}N(x) .$$

On pourra poser $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x)=0$ et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

3.b En déduire que $\forall x\in[0,n], \left|f(x)-P_f(x)\right|\le \dfrac{1}{n+1}M_{n+1}$

On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.

Polynômes de Bernouilli

Dans tout le problème, pour P dans $\mathbb{R}[X]$, on identifiera le polynôme P avec sa fonction polynomiale associée et on notera P' le polynôme dérivé de P.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme B de $\mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$B' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 B(t)dt = 0. \tag{1}$$
   (b) On note p le degré de P et a_p son coefficient dominant. Donner le degré et le coefficient dominant du polynôme B vérifiant la propriété (1).
2. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par les propriétés suivantes :
   $$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n' = nB_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Quel est le degré du polynôme B_n ?
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est unitaire.
   (c) Justifier que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite vérifiant la propriété (2).
   (d) Démontrer que :
   $$B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
   Indication : on pourra poser $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ et démontrer que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (2).
   (e) Démontrer que :
   $$B_n(X) = 2^{n-1}\Big(B_n\Big(\frac{X}{2}\Big) + B_n\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\Big) \tag{4}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = B_n(0)$.
   (a) Démontrer, par récurrence, la formule suivante :
   $$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   (b) Donner les polynômes B_1, B_2 et B_3 et les nombres b_1, b_2 et b_3.
   (c) Démontrer que $b_{2p+1} = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_p = B_p(1) = B_p(0)$.
   (e) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_{2p+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+2} \binom{2p+2}{k} b_k$.
   (f) En déduire que, pour $p \geqslant 2$, on a $b_{2p} = -\dfrac{1}{(p+1)(2p+1)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2} \binom{2p+2}{k} b_k$.
   (g) Calculer la valeur de b_4.

* *
*

CCP MP1 2018
Un corrigé

1 "Permutation limite-intégrale" et intégrales de Gauss

1.1 Utilisation d'une série entière

Q.1. La fonction exp est développable en série entière entière de rayon de convergence infini et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

En utilisant ceci avec x^2, on en déduit que

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}\ dx$$

$f_n\ :\ x \mapsto (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)}$ est continue sur $[0,1]$ et $\|f_k\|_\infty = \frac{1}{k!}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(f_k)$ converge normalement sur le SEGMENT $[0,1]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\ dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}}$$

Q.2. $u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est le terme général d'une suite alternée, décroissante en module et convergente de limite nulle. La règle spéciale s'applique à la série $\sum(u_k)$. Elle indique que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \le |u_{n+1}|$$

Ceci s'écrit exactement

$$\boxed{|I - s_n| \le \frac{1}{(2n+3)(n+1)!}}$$

Q.3.
```
def factorielle(n):
    if n==0: return 1
    else: return (factorielle (n-1))*n
```

Q.4. On calcule les termes u_k définis en question 2 tant le module du terme est inférieur à 10^{-6}.

```
def u(k):
    return (-1)**k/((2*k+1)*factorielle(k))

k=0
while abs(u(k))>10**(-6):
    k=k+1

print(k)
```

1.2 Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q.5. Soit $x \geq 0$. $x^2/n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour ces n, $1 - \frac{x^2}{n} > 0$ et donc

$$\forall n \geq n_0,\ f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$$

Le terme dans l'exponentielle équivaut, quand $n \to +\infty$, à $n \times \left(-\frac{x^2}{n}\right) = -x^2$ et tend donc vers $-x^2$. Par continuité de l'exponentielle, on a donc $f_n(x) \to e^{-x^2}$ quand $n \to +\infty$.

$$\boxed{(f_n) \text{ converge simpelment sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}}$$

Q.6. Par concavité de la fonction logarithme,

$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$$

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x^2/n \in [0,1]$. Si $x^2/n \in [0,1[$ alors (croissance de exp et notre inégalité de concavité)

$$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}$$

et le résultat reste vrai si $x^2/n = 1$ ($0 \leq e^{-x^2}$ dans ce cas). Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}}$$

Utilisons alors le théorème de convergence dominée.

- (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction continue sur $[0,1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0,1]$ puisque continue sur le SEGMENT.

Le théorème s'applique et donne

$$I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$$

On développe la puissance par formule du binôme et par linéarité du passage à l'intégrale,

$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k\ dx$$

Le calcul de l'intégrale est immédiat et on trouve

$$\boxed{I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}}$$

2 Notion de polynôme interpolateur

2.1 Existence du polynôme interpolateur

Q.7. x_k est racine de l_i pour $i \neq k$ et $l_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \dots, x_n$.
Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \dots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leq n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \dots, x_n}$$

2.2 Calcul effectif du polynôme interpolateur de Lagrange

Q.8. Une première fonction `l(i,x,a)` permet le calcul de $l_i(a)$ associé aux x_k.

```
def l(i,x,a):
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r
```

Il reste à calculer la somme définissant L_n associé aux y_i.

```
def lagrange(x,y,a):
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q.9. La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On peut d'ailleurs noter que d'après le cours cette matrice est inversible quand les x_i sont deux à deux distincts ce qui permet de prouver à nouveau l'existence et l'unicité d'un polynôme interpolateur.
Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait apparaître des zéros par $n-1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \dots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \dots, x_0$ en $O(1+2+\dots+(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3)}$$

2.3 Expression de l'erreur d'interpolation

Q.10. Montrons par récurrence (finie) que la propriété : "$\phi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois" est vraie pour $k = 0, \dots, p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \dots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \dots, p-k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p-k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a,b[$.

$$\boxed{\text{si } \phi\ :\ [a,b]\to\mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c\in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c)=0.}$$

Q.11. $f-L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x\in\sigma$, $\mathcal{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a,b[$).

$$\boxed{\text{pour tout } x\in\sigma, \text{ la propriété } \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.12. Comme $x\notin\sigma$, $\pi_\sigma(x)\neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda=\frac{f(x)-L_n(f)(x)-F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x)=0$.

Q.13. F s'annule (comme $f-L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x\notin\sigma$. On a donc $n+1$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

On en déduit avec Q.10 que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x\in]a,b[$. Comme $L_n(f)\in\mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle. Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda=\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x)=0$, on obtient $\mathcal{P}_x$.

$$\boxed{\forall x\in[a,b],\ \mathcal{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q.14. $\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$.
On remarque que

$$\forall x\in[a,b],\ |\pi_\sigma(x)|\leq(b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathcal{P}_x$, on en déduit que

$$\boxed{\|f-L_n(f)\|_\infty\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty}$$

Q.15. On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n=\{x_0,\dots,x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$\|f-L_n(f)\|_{\infty,[0,2\pi]}\leq\frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le majorant est de limite nulle et ainsi

$$\boxed{(L_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,2\pi]}$$

Q.16. On sait que

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$$

Quand une fonction est développable en série entière, son développement est nécessairement celui de Taylor. Ainsi

$$\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(2k)}(0)=(-1)^k(2k)!$$

On en déduit que $\|f^{(2k)}\|_\infty\geq|f(0)|\geq(2k)!$ (la norme infinie existe puisque f est de classe C^∞ sur le segment $[-1,1]$).

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \|f^{(2k)}\|_\infty\geq(2k)!}$$

3 Famille de polynômes orthogonaux

Q.17. Comme $\langle 1, 1\rangle = 2$, on a $\boxed{P_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$. On calcule alors

$$Q_1 = X - \langle X, P_0\rangle P_0 = X \quad \text{et} \quad \langle X, X\rangle = \frac{2}{3}$$

pour en déduire que $\boxed{P_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X}$

Q.18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, \dots, P_n)$ étant orthonormée, P_n est orthogonal aux P_i avec $i \le n-1$ et donc à l'espace engendré par ces polynômes, c'est-à-dire $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Par ailleurs $P_n \in \text{Vect}(1, \dots, X^n) = \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \notin \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $(P_0, \dots, P_n)$ est libre). Ainsi, P_n est de degré n.

$$\boxed{P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp \text{ et } \deg(P_n) = n}$$

Q.19. Comme $n \ge 1$, $1 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle P_n, 1\rangle = 0$ i.e. $\boxed{\int_{-1}^1 P_n(t)\, dt = 0}$.
Si, par l'absurde, P_n n'admettait pas de racine dans $[-1, 1]$ alors (théorème des valeurs intermédiaires avec P_n continu), P_n serait de signe constant sur $[-1, 1]$. Avec la continuité de P_n et $\int_{-1}^1 P_n(t)\, dt = 0$, ceci entraînerait la nullité de P_n sur $[-1, 1]$. P_n serait alors le polynôme nul (infinité de racine) ce qui est faux.

$$\boxed{P_n \text{ admet au moins une racine dans } [-1, 1]}$$

Q.20. Par choix de Q, H n'admet que des racines de multiplicité paire. Sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit alors

$$H = a\prod_{i=1}^{k}(X - \alpha_i)^{2m_i} H_1(X)$$

où H_1 est un produit de polynômes de degré 2, unitaires, à discriminant < 0. H est alors de signe constant (selon le signe du coefficient dominant c).
Par ailleurs, $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (car $p < n$) et donc $\langle P_n, Q\rangle = 0$, c'est à dire $\boxed{\int_{-1}^1 H(t)\, dt = 0}$.
Comme ci-dessus (continuité, intégrale nulle, signe constant), ceci entraîne la nullité de H (sur $[-1, 1]$ puis comme polynôme) et une absurdité (car ni P_n ni Q n'est nul et $\mathbb{R}[X]$ est intègre).
On peut en fait reprendre le raisonnement en ne considérant que les racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. On prouve alors par l'absurde qu'il y a n racines de multiplicité impaire dans $[-1, 1]$. Comme $\deg(P_n) = n$, les multiplicités valent 1 et on a toute les racines.

$$\boxed{P_n \text{ admet } n \text{ racines simples dans } [-1, 1]}$$

4 Méthodes de quadrature

Q.21. Le changement de variable affine (et donc licite) $t = 2\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} - 1$ donne

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f\left(x_k + (t+1)\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) \frac{x_{k+1} - x_k}{2}\, dt$$

ce qui est la formule demandée.

Q.22. Comme $l_i(x_k) = \delta_{i,k}$, on a $J(l_i) = \alpha_i = \int_{-1}^1 l_i(t)\, dt$. $P \mapsto \sum_{i=0}^n \alpha_i P(t_i) - \int_{-1}^1 P(t)\, dt$ est linéaire et nulle en $l_0, \dots, l_n$ et donc sur $\text{Vect}(l_0, \dots, l_n) = \mathbb{R}_n[X]$ (tout polynôme P de degré $\le n$ est combinaison des l_i puisque $P = \sum_{i=0}^n P(t_i) l_i$). Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ on a } J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt}$$

Q.23. On a $l_0 = -\frac{1}{2}(X-1)$ et $l_1 = \frac{1}{2}(X+1)$ et donc (calcul d'intégrale élémentaire)

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 1}$$

$2\alpha_0 g(0)$ est l'aire du rectangle $[-1,1]\times[0,g(-1)]$ et $2\alpha_1 g(1)$ celle du rectangle $[-1,1]\times[0,g(1)]$. La demi-somme de ces quantités est l'aire du trapèze $((-1,0),(-1,1),(1,g(1)),(-1,g(-1)),(-1,0))$. Ceci explique le nom de la méthode.

Quadrature de Gauss

Q.24. On a d'une part (les t_i sont des racines de P_{n+1})

$$J(QP_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i Q(t_i) P_{n+1}(t_i) = 0$$

D'autre part, comme P est de degré $\leq 2n+1$ et P_{n+1} de degré $n+1$, le quotient Q est de degré $\leq n$ et donc orthogonal à P_{n+1}. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} P_{n+1} Q(t)\ dt = 0$$

On a donc

$$\boxed{J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt = 0}$$

Comme J est linéaire, on a aussi $J(P) = J(QP_{n+1}) + J(R)$. De plus $J(R) = \int_{-1}^{1} R(t)\ dt$ car R est de degré $\leq n$. Ainsi

$$J(P) = J(QP_{n+1}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_{n+1}(t)\ dt + \int_{-1}^{1} R(t)\ dt = \int_{-1}^{1} (Q(t)P_{n+1}(t) + R(t))\ dt$$

et donc

$$\boxed{J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)\ dt}$$

Q.25. Fixons $i \in [\![0,n]\!]$ et posons $P = \prod_{k\neq i} (X-t_k)^2$. $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ et donc

$$\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = J(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(t_k) = \alpha_i P(t_i)$$

Comme P est continue, positive et non nulle sur $[-1,1]$, son intégrale sur $[-1,1]$ est > 0. De même $P(t_i) > 0$. Ainsi

$$\boxed{\forall i,\ \alpha_i > 0}$$

On remarque enfin que la somme des α_i vaut $J(1)$ et comme $1 \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $J(1) = \int_{-1}^{1} 1\ dt = 2$.

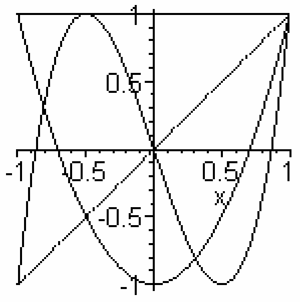
$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 2}$$

Correction

d'après Ecole de l'Air 1993

Partie I

1.a $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x^2-1$ et $f_3(x)=4x^3-3x$.



1.b $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)$ en posant $\theta=\arccos x$ pour nous alléger la vie. Via $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$, on obtient : $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=2\cos\theta\cos n\theta=2xf_n(x)$.

1.c Unicité : Si T_n et U_n sont solutions alors pour tout $x\in[-1,1]$, $T_n(x)=U_n(x)$ et donc x est racine de T_n-U_n. Ce polynôme ayant une infinité de racines, on peut conclure qu'il est nul et que $T_n=U_n$.
Existence : Raisonnons par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$ et $n=1$: $T_0=1$ et $T_1=X$ nous convient à l'extase d'avoir déterminer deux sublimes solutions.
Supposons la propriété établie au rang n et $n-1$ (avec $n\geq 1$).
$f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)=T_{n+1}(x)$ en posant $T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ qui est bien un polynôme. Récurrence établie.
$T_0=1$, $T_1=X$, $T_2=2X^2-1$, $T_3=4X^3-3X$ et $T_4=8X^4-8X^2+1$.

2.a Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $\deg T_n=n$.
La propriété est vraie, ô joie, aux rangs $n=0$ et $n=1$.
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n\geq 1$).
$T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ avec $\deg 2XT_n=n+1$ et $\deg T_{n-1}=n-1$. Par somme de polynôme de degré distincts : $\deg T_{n+1}=\max(\deg(2XT_n),\deg(T_{n-1}))=n+1$. Récurrence établie.
Notons
Les coefficients dominants de T_0 et T_1 valent 1.
Pour $n\geq 1$, on voit par l'étude ci-dessus on voit que le coefficient dominant de T_{n+1} est le double de celui de T_n. On peut donc conclure que le coefficient dominant de T_0 vaut 1 et celui de T_n vaut 2^{n-1} pour $n\geq 1$.

2.b Soit $x\in[-1,1]$ une racine de T_n. Pour $\theta=\arccos x\in[0,\pi]$ on a $x=\cos\theta$ et $T_n(x)=\cos n\theta=0$ donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ puis $\theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Sachant $\theta\in[0,\pi]$, on peut affirmer $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$.
Ainsi $x=\cos\dfrac{\pi}{2n},\cos\dfrac{3\pi}{2n},\dots,$ ou $\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}$.
Inversement, on vérifie aisément que, ces éléments sont des racines de T_n dans $[-1,1]$. Ainsi les racines de T_n dans $[-1,1]$ sont exactement les $x_0,\dots,x_{n-1}$ avec $x_k=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$ les $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0,\pi]$. La fonction cosinus étant injective sur $[0,\pi]$, on peut dire que les $x_0,\dots,x_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Le polynôme T_n possède donc exactement n racines dans l'intervalle $[-1,1]$. Or $\deg T_n=n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

2.c Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$, montrons que T_n et n ont même parité.
Pour $n=0$ ou $n=1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n\geq 1$)

Si n est pair alors T_n est pair, T_{n-1} impair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est impair.
Si n est impair alors T_n est impair, T_{n-1} pair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est pair.
Récurrence établie.

3.a $T_n(\cos\theta) = f_n(\cos\theta) = \cos(n\arccos(\cos\theta)) = \cos(n\theta)$ que $\theta \in [0,\pi]$ ou par parité que $\theta \in [-\pi,0]$ ou encore par périodicité que $\theta \in \mathbb{R}$.
La deuxième relation s'établit par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok.
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n-1$ (avec $n \geq 1$)
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}n\theta - \operatorname{ch}(n-1)\theta$ or $\operatorname{ch}(n+1)\theta + \operatorname{ch}(n-1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}n\theta$ donc
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n+1)\theta$.
Récurrence établie.

3.b Si $|x| \leq 1$ alors $T_n(x) = f_n(x) = \cos(n\arccos x) \in [-1,1]$.
Si $x > 1$ alors il existe $\theta > 0$ tel que $x = \operatorname{ch}\theta$ et alors $T_n(x) = \operatorname{ch}n\theta > 1$ donc $|T_n(x)| > 1$.
Par raison de parité : si $x < -1$ alors $|T_n(x)| > 1$.

4. L'équation $|T_n(x)| = 1$ ne peut avoir de solution que dans $[-1,1]$.
Soit $x \in [-1,1]$ solution de cette équation.
Il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$.
$|T_n(x)| = 1$ donne alors $|\cos n\theta| = 1$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi$ i.e. $\theta = k\pi/n$.
Or $\theta \in [0,\pi]$ donc $k \in \{0,\dots,n\}$ et finalement x est l'un des $\cos\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{0,\dots,n\}$. Inversement, ces éléments sont bien racines de l'équation $|T_n(x)| = 1$. Posons $a_k = \cos\frac{k\pi}{n}$. On observe :
$-1 = a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 < a_0 = 1$. Il y a donc exactement $n+1$ solutions et les solutions des équations $T_n(x) = 1$ sont alternées avec les solutions de l'équation $T_n(x) = -1$ car $T_n(a_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

5.a Par ce qui précède $\|T_n\| = 1$ car $\forall x \in [-1,1], |T_n(x)| \leq 1$ et que $T_n(1) = 1$.
Par suite $\|\tilde{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

5.b $\tilde{T}_n$ et P sont unitaires et de degré n donc $\deg D < n$.

5.c $D(\cos\frac{k\pi}{n}) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(\cos\frac{k\pi}{n})$.
Si k est pair alors $D(\cos\frac{k\pi}{n}) = \frac{1}{2^{n-1}} - P(\cos\frac{k\pi}{n}) \geq \frac{1}{2^{n-1}} - \|P\| > 0$.
Si k est impair alors $D(\cos\frac{k\pi}{n}) = \frac{-1}{2^{n-1}} - P(\cos\frac{k\pi}{n}) \leq \frac{-1}{2^{n-1}} + \|P\| < 0$.
Pour $k \in \{0,\dots,n\}$ les $\cos\frac{k\pi}{n}$ sont des valeurs successives entre lesquelles la fonction D change de signe, or celle-ci est continue donc elle s'annule entre ces valeurs successives : cela fournit au moins n annulations du polynôme D or $\deg D < n$ donc $D = 0$ et $P = \tilde{T}_n$ ce qui est absurde puisque $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

Partie II

1.a $\deg L_k = n$.

1.b Les racines de L_k sont les $a_0,\dots,\hat{a}_k,\dots,a_n$ donc $L_k(a_i) = 0$ pour $i \neq k$.

$$L_k(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_k - a_j} = 1.$$

1.c Supposons $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. En évaluant cette en relation en a_k on obtient : $\lambda_k = 0$. La famille $(L_0,\ldots,L_n)$ est donc libre or elle est constituée de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)\delta_{k,i} = f(a_i)$ donc P est bien solution du problème posé. Si Q en est une autre solution alors $P(a_i) = Q(a_i)$ donc a_i racine de $P-Q$. Cela fournit au moins $n+1$ racines de $P-Q$ alors que $P-Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P-Q=0$ i.e. $P=Q$.

3.a Si $x \in \{a_0,\ldots,a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x) = 0$ et $f(x) = P(x)$ donc n'importe quel ξ convient.

3.b Si $x \notin \{a_0,\ldots,a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x) \neq 0$ et $K = \dfrac{P(x)-f(x)}{\Pi_{n+1}(x)}$ convient

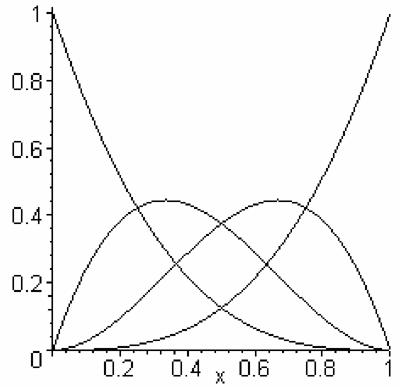
F s'annule alors en $a_0,\ldots,a_n$ et aussi en x : cela fournit $n+2$ annulations. Par application du théorème de Rolle, F' s'annule au moins $n+1$ fois, F'' au moins n fois,..., $F^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois d'où l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Or $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - K\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$ avec $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg P \leq n$ et $\Pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$ car Π_{n+1} est unitaire et de degré $n+1$. On conclut alors : $f^{(n+1)}(\xi) = K(n+1)!$ puis la relation voulue.

3.c Pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x)-P(x)| \leq \dfrac{|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \leq \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|$ t donc

$$\|f-P\| = \sup_{[-1,1]}|f(x)-P(x)| \leq \frac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|.$$

4. $\Pi_{n+1} \in P_{n+1}$. Compte tenu de la partie I, $\|\Pi_{n+1}\|$ sera s'il est égal à $\Pi_{n+1} = \tilde{T}_{n+1}$ ce qui est obtenu en prenant $a_0,\ldots,a_n$ les racines de T_{n+1} à savoir les $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ avec $k \in \{0,\ldots,n\}$.

Correction



1. $B_{3,0}(x)=(1-x)^3$, $B_{3,1}(x)=3x(1-x)^2$, $B_{3,2}(x)=B_{3,1}(1-x)$ et $B_{3,3}(x)=x^3$.

2.a $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=(X+1-X)^n=1$.

$\forall x\in[0,1],\forall k\in[\![0,n]\!],B_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$

donc $B_{n,k}(x)\leq\sum_{\ell=0}^{n}B_{n,\ell}(x)=1$.

2.b Rappelons $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

$$\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k}\underset{\ell=k-1}{=}nX\sum_{\ell=0}^{n-1}\binom{n-1}{\ell}X^\ell(1-X)^{n-1-\ell}=nX\sum_{\ell=0}^{n-1}B_{n-1,\ell}=nX.$$

Comme ci-dessus : $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}=nX\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell-1)B_{n-1,\ell}=n(n-1)X^2$

et donc $\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)B_{n,k}+\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}=n(n-1)X^2+nX=nX((n-1)X+1)$.

3. $B_{n,k}'=k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k}-(n-k)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k-1}$ or pour $k\neq 0$ et $k\neq n$,

$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}$ donc $B_{n,k}'=n(B_{n-1,k-1}-B_{n-1,k})$.

Quand $k=0$, $B_{n,k}'=-nB_{n-1,k}$ et quand $k=n$, $B_{n,k}'=nB_{n-1,k-1}$.

4. Supposons $\lambda_0B_{n,0}+\lambda_1B_{n,1}+\cdots+\lambda_nB_{n,n}=0$.
En évaluant la relation en 0, on obtient $\lambda_0=0$.
On obtient alors la relation $\lambda_0B_{n,0}+\lambda_1B_{n,1}+\cdots+\lambda_{n-1}B_{n,n-1}=0$.
On peut simplifier celle-ci par X et évaluer à nouveau en 0, pour obtenir $\lambda_1=0$.
On reprend ce procédé et on obtient successivement $\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.
La famille $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre.
De plus celle-ci est formée de $n+1=\dim\mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg B_{n,k}=n$), c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.a Comme $B_{n,k}\in\mathbb{R}_n[X]$, on a immédiatement $B(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi $B:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$.
On a $B(\alpha P+\beta Q)=\sum_{k=0}^{n}(\alpha P+\beta Q)\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=\alpha\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}+\beta\sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=\alpha B(P)+\beta B(Q)$.
Ainsi B est linéaire et c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.b Soit $P\in\ker B$. On a $\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}=0$. Or $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre donc $P\left(\frac{k}{n}\right)=0$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
Le polynôme possède alors au moins $n+1$ racines, or $\deg P\leq n$ donc $P=0$.
Ainsi $\ker B=\{0\}$. L'endomorphisme B est donc injectif, or $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie donc B est un automorphisme.

Partie II

1. Si $f(x)=1$ alors $P_n(x)=1\to 1=f(x)$.
Si $f(x)=x$ alors $P_n(x)=x\to x=f(x)$.
Si $f(x)=x^2$ alors $P_n(x)=\dfrac{x((n-1)x+1)}{n}\to x^2=f(x)$.

2.a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)=x^2\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)-\frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n}kB_{n,k}(x)+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k^2B_{n,k}(x)$
donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)=x^2-2x^2+\frac{x((n-1)x+1)}{n}=\frac{x(1-x)}{n}$.

2.b $\displaystyle\alpha^2\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}\le\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}=\frac{x(1-x)}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{k\in B}B_{n,k}(x)\le\frac{x(1-x)}{na^2}$.
De plus, une étude fonctionnelle donne $x(1-x)\le 1/4$ sur $[0,1]$.

2.c $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x)-\sum_{k=0}^{n}f(x)B_{n,k}(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)B_{n,k}(x)\right|$

donc $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)=\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)+\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)$

or $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in A}\frac{\varepsilon}{2}B_{n,k}(x)=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(x)=\frac{\varepsilon}{2}$

et $\displaystyle\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}\left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+\left|f(x)\right|\right)B_{n,k}(x)\le\sum_{k\in B}2MB_{n,k}(x)\le\frac{M}{2n\alpha^2}$

donc $\displaystyle\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M}{2n\alpha^2}$.
Notons que $M<+\infty$ car f est continue sur un segment donc y est bornée.

Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\ge N$ on ait $\dfrac{M}{2n\alpha^2}\le\dfrac{\varepsilon}{2}$ car $\dfrac{M}{2n\alpha^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
Suite à ce raisonnement, on a : $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\ge N,\left|P_n(x)-f(x)\right|\le\varepsilon$.
On peut donc dire que $P_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$.

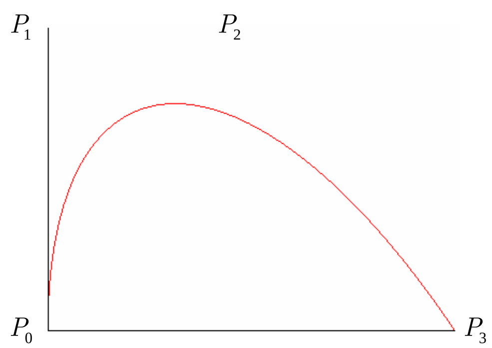
3.a $\displaystyle P_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}'(x)=-nf(0)B_{n-1,0}'(x)+n\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(B_{n-1,k-1}(x)-B_{n-1,k}(x)\right)+nf(1)B_{n-1,n-1}'(x)$.

Par réorganisation de la somme : $\displaystyle P_n'(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n-1,k}(x)$.

3.b Si f est croissante alors pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\ge f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ donc $P_n'(x)\ge 0$ puis P_n croît.

Partie III

1. Par calcul barycentrique $\displaystyle\overrightarrow{OM(t)}=\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)\overrightarrow{OP_k}$ car on sait $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(t)=1$.



2. $M(t)\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$ avec $\begin{cases} x(t)=3t^2(1-t)+2t^3=3t^2-t^3 \\ y(t)=3t(1-t)^2+3t^2(1-t)=3t-3t^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x'(t)=3t(2-t) \\ y'(t)=3(1-2t) \end{cases}$.

t	0		1/2		1
$x(t)$	0	$\nearrow$	3/8	$\nearrow$	2
$y(t)$	0	$\nearrow$	3/4	$\searrow$	0
$m(t)$	∞	$+$	0	$-$	-1

3.a $\overrightarrow{OM(0)}=\sum_{k=0}^{n}B_{n,k}(0)\overrightarrow{OP_k}=\overrightarrow{OP_0}$ car $B_{n,k}(0)=\begin{cases}1 & \text{si } k=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Ainsi $M(0)=P_0$ et de même $M(1)=P_n$.

3.b $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0)=\sum_{k=0}^{n}B'_{n,k}(0)\overrightarrow{OP_k}$ .Or $B'_{n,k}(0)=\begin{cases}-n & \text{si } k=0\\ n & \text{si } k=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0)=-\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{P_0P_1}\neq\vec{o}$.

Le point $M(0)$ est régulier et donc la tangente en $M(0)=P_0$ passe par P_1 car dirigée par $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Correction

d'après ESIEE Amiens 1997

Partie I

1. $(.|.)$ est clairement un forme bilinéaire symétrique.

Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P(t)^2\,\mathrm{d}t\geq 0$ et si $(P\mid P)=0$ alors la fonction $t\mapsto P(t)^2$ est nulle car continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$. Par suite P est le polynôme nul car il possède une infinité de racines.

2. Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}[X]$. $L(\lambda P+\mu Q)=\lambda L(P)+\mu L(Q)$ notamment par linéarité de la dérivation.

De plus $L:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$ donc L est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3.a La linéarité de L_n provient de celle de L. Le problème est de justifier que L_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a $\deg\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\leq\deg P-1\leq n-1$ donc $\deg\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)\leq 2+n-1=n+1$ puis $\deg L_n(P)\leq n$. Ainsi $L_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

3.b $L_n(1)=0$, $L_n(X)=(X^2-1)'=2X$, $L_n(X^p)=\left(p(X^2-1)X^{p-1}\right)'=p(p+1)X^p-p(p-1)X^{p-2}$.

3.c $\mathrm{Mat}_{(1,X,\ldots,X^n)}L_n=\begin{pmatrix}0&0&2&&0\\&2&0&\ddots&\\&&6&\ddots&n(n-1)\\&&&\ddots&0\\0&&&&n(n+1)\end{pmatrix}$.

4. $(L(P)\mid Q)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\right)Q(x)\mathrm{d}x\underset{\text{ipp}}{=}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)Q(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$

donc $(L(P)\mid Q)=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{d}x$

or la symétrie de cette formule en P et Q permet de conclure $(L(P)\mid Q)=(P\mid L(Q))$.

Partie II

1.a $P_1=X$, $P_2=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$.

1.b $\deg U_n=2n$ donc $\deg P_n=\deg U_n-n=n$.

Le terme en x^n de P_n provient de la dérivation à l'ordre n du terme $\frac{1}{2^n n!}x^{2n}$ donc $a_n=\frac{1}{2^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

1.c La famille $(P_0,P_1,\ldots,P_n)$ est de degrés étagés (i.e. $\deg P_i=i$) c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $P_n=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((x-1)^n\right)^{(k)}\left((x+1)\right)^{(n-k)}=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$

donc $P_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k$.

$P_n(1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 2^n=1$ et $P_n(-1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(-2)^n=(-1)^n$.

3.a $\left((x^2-1)^{n+1}\right)'=(n+1)\times 2x\times(x^2-1)^n=2(n+1)xU_n(x)$.

$(x^2-1)((x^2-1)^n)'=n\times 2x\times(x^2-1)^n=2nxU_n(x)$.

3.b En dérivant $n+1$ fois la relation (1), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(U_{n+1}(x)\big)\right)=\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(2(n+1)xU_n(x)\big)=2(n+1)\binom{n+1}{0}x\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\big(U_n(x)\big)+2\binom{n+1}{1}(n+1)\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\big(U_n(x)\big)$$

donc $2^{n+1}(n+1)!P_{n+1}'(x)=2(n+1)x2^n n!P_n'(x)+2(n+1)^2 2^n n!P_n(x)$

puis $P_{n+1}'(x)=xP_n'(x)+(n+1)P_n(x)$.

En dérivant $n+1$ fois la relation (2), via la formule de Leibniz, on obtient :

$$(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+(n+1)2xU_n^{(n+1)}(x)+\frac{n(n+1)}{2}2U_n^{(n)}(x)-2nxU_n^{(n+1)}(x)-2n(n+1)U_n^{(n)}(x)=0$$

donc $(x^2-1)U_n^{(n+2)}(x)+2xU_n^{(n+1)}(x)=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$ i.e. $\big((x^2-1)U_n^{(n+1)}(x)\big)'=n(n+1)U_n^{(n)}(x)$

et donc $L(P_n)=n(n+1)P_n$.

3.c $n(n+1)(P_n\mid P_m)=(L(P_n)\mid P_m)=(P_n\mid L(P_m))=m(m+1)(P_n\mid P_m)$

donc $\big(n(n+1)-m(m+1)\big)(P_n\mid P_m)=0$.

Or $n\mapsto n(n+1)$ est injective et $n\neq m$ donc $n(n+1)\neq m(m+1)$ puis $(P_n\mid P_m)=0$.

4.a $(P_0,\dots,P_n)$ est base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc on peut écrire $Q=\lambda_0P_0+\dots+\lambda_nP_n$.

Par suite $(P_{n+1}\mid Q)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k(P_{n+1}\mid P_k)=0$.

4.b Notons $a_1,\dots,a_p$ les racines de multiplicités impaire du polynôme P_{n+1} appartenant à $]-1,1[$.

Posons $Q=\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.

Le polynôme QP_{n+1} n'a que des racines de multiplicité paire dans $]-1,1[$, il est donc de signe constant sur $[-1,1]$ et par suite $\int_{-1}^{1}Q(x)P_{n+1}(x)\mathrm{d}x\neq 0$ (par non nullité de l'intégrale d'une fonction continue, non nulle, et de signe constant). Par suite $p=\deg Q>n$.

Or P_{n+1} est de degré $n+1$ donc nécessairement $p\leq n+1$ et donc finalement $p=n+1$.

Par suite P_{n+1} possède $n+1$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

De plus, puisque $\deg P_{n+1}=n+1$, on peut assurer qu'il n'y en a pas d'autres et que celles-ci sont simples.

5.a $P_{n+1}'=(n+1)a_{n+1}X^n+Q$ avec $\deg Q<n$ ou encore $P_{n+1}'=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}P_n+\hat{Q}$ avec $\deg\hat{Q}<n$.

Par suite $(P_{n+1}'\mid P_n)=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}(P_n\mid P_n)+(\hat{Q}\mid P_n)=(n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\|P_n\|^2$ car $(\hat{Q}\mid P_n)=0$.

5.b $\|P_n\|^2=\int_{-1}^{1}P_n(x)^2\,\mathrm{d}x=\big[xP_n(x)^2\big]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_n'(x)\mathrm{d}x=2-2\int_{-1}^{1}xP_n(x)P_n'(x)\mathrm{d}x$.

5.c $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n+1}$ donc $(P_{n+1}'\mid P_n)=(2n+1)\|P_n\|^2$.

De plus $P_{n+1}'(x)=xP_n'(x)+(n+1)P_n(x)$ donc $(P_{n+1}'\mid P_n)=(XP_n'\mid P_n)+(n+1)(P_n\mid P_n)$

or $(XP_n'\mid P_n)=\int_{-1}^{1}xP_n'(x)P_n(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\|P_n\|^2$

donc $(2n+1)\|P_n\|^2=1-\frac{1}{2}\|P_n\|^2+(n+1)\|P_n\|^2$ puis $\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}$.

6. P_{n+1} est un vecteur normal à l'hyperplan $\mathbb{R}_n[X]$ de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Par suite $d(X^{n+1},\mathbb{R}_n[X])=\left\|\frac{(X^{n+1}\mid P_{n+1})}{\|P_{n+1}\|^2}P_{n+1}\right\|=\frac{|(X^{n+1}\mid P_{n+1})|}{\|P_{n+1}\|}$.

or $X^{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}P_{n+1}+Q$ avec $\deg Q<n+1$ donc $(X^{n+1}\mid P_{n+1})=\dfrac{1}{a_{n+1}}\left\|P_{n+1}\right\|^2$

Par suite $d(X^{n+1},\mathbb{R}_n[X])=\dfrac{1}{|a_{n+1}|}\left\|P_{n+1}\right\|=\dfrac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$.

Correction

d'après Mines de Sup 1995

Partie I

1. Si P est un polynôme constant alors $\Delta(P)=0$ ce qui en détermine degré et coefficient dominant.
Si P est un polynôme non constant, posons p son degré, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ (avec $a_p\neq 0$) et on a $\Delta(P)=\sum_{k=0}^{p}a_k\Delta(X^k)$ avec $\Delta(X^0)=0$ et $\Delta(X^k)=(X+1)^k-X^k=kX^{k-1}+\cdots$ pour $k\geq 1$. Par suite $\Delta(P)=pa_pX^{p-1}$ donc $\deg\Delta(P)=p-1$ et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est pa_p où a_p désigne le coefficient dominant de P.

2.a Δ_n est linéaire car restriction d'une application linéaire, de plus ci-dessus, on a vu que si $\deg P\leq n$ alors $\deg\Delta(P)\leq n-1\leq n$ donc $\Delta_n:E_n\to E_n$ et ainsi Δ_n est un endomorphisme de E_n.

2.b En 1, on a obtenu : si P est constant $\Delta(P)=0$ et si P non constante $\Delta(P)\neq 0$. Le noyau de Δ_n est donc réduit à l'ensemble des polynômes constants. Ainsi $\dim\ker\Delta_n=1$ et par le théorème du rang $\mathrm{rg}\,\Delta_n=\dim E_n-1=n$. De plus si $P\in E_n$ alors on a $\deg\Delta(P)\leq n-1$ donc $\Delta(P)\in E_{n-1}$. Par suite $\mathrm{Im}\,\Delta_n\subset E_{n-1}$. Par inclusion et égalité des dimensions : $\mathrm{Im}\,\Delta_n=E_{n-1}$.

3. $\forall P\in E$, on posant $n=\deg P$, il existe $Q\in E_{n+1}$ tel que $\Delta(Q)=P$ car Δ_{n+1} est un endomorphisme de E_{n+1} dont l'image est E_n.

Partie II

1.a $\Delta(N_k)(x)=N_k(x+1)-N_k(x)=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{k!}(x+1-(x-k+1))=\dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{(k-1)!}$
donc $\Delta(N_k)=N_{k-1}$.

1.b Pour $j\leq k$: $\Delta^j(N_k)=N_{k-j}$ et puisque $\Delta(N_0)=0$, $\Delta^j(N_k)=0$ pour $j>k$.
Par suite $(\Delta^j(N_k))(0)=0$ si $j<k$ et si $j>k$ alors que $(\Delta^j(N_k))(0)=1$ si $j=k$.

2.a La famille $(N_0,N_1,...,N_n)$ vérifie $\deg N_k=k$ donc c'est une famille de polynôme de degrés étagés et par conséquent celle-ci est une base de E_n.

2.b $(\Delta^j(P))(0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\Delta^j(N_k))(0)=a_j$ puisque $(\Delta^j(N_k))(0)=\delta_{j,k}$.

3. $a=\Delta^0(P)(0)=0$, $b=\Delta^1(P)(0)=1$ et $c=\Delta^2(P)(0)=2$.
Considérons $Q=aN_1+bN_2+cN_3$. Par l'étude qui précède $\Delta(Q)=aN_0+bN_1+cN_2=P$.
Concrètement : $Q(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}+2\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}=\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$.
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}P(k)=\sum_{k=1}^{n}\Delta(Q)(k)=\sum_{k=1}^{n}Q(k+1)-Q(k)=Q(n+1)-Q(1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.a Par récurrence $T^k(f)(x)=f(x+k)$.

4.b $\Delta=T-\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ avec T et $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ qui commutent donc par la formule du binôme de Newton :
$\Delta^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k$ puis $\Delta^n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k(f)$.

4.c $(\Delta^n(f))(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)$ car $T^k(f)(0)=f(k)$.

Partie III

1.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in E_n$.
$\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\ldots,(\lambda P+\mu Q)(k),\ldots)=(\ldots,\lambda P(k)+\mu Q(k),\ldots)=\lambda(\ldots,P(k),\ldots)+\mu(\ldots,Q(k),\ldots)$
donc $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$ et φ est linéaire.
Soit $P\in E_n$. Si $\varphi(P)=(0,\ldots,0)$ alors $P(0)=\ldots=P(n)=0$ et donc le polynôme admet au moins $n+1$ racines or $\deg P\le n$ donc $P=0$. Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$ or $\dim E_n=\dim\mathbb{R}^{n+1}$ donc φ est un isomorphisme.

1.b Par la bijectivité de φ , il existe un unique $P\in E_n$ tel que $\varphi(P)=(f(0),\ldots,f(n))$. Par suite le problème $\mathcal{P}$ possède une unique solution.

2.a $(\Delta^j(f))(0)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}f(k)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}P(k)=(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b Rappelons que pour $P\in E_n$: $P=\sum_{j=0}^{n}a_jN_j$ avec $a_j=\Delta^j(P)(0)$ donc

$P_f=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(P_f))(0)N_j=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(f))(0)N_j$.

3.a Posons K une constante telle que $f(x)-P_f(x)=K.N(x)$. Une telle constante K existe car $N(x)\neq 0$ puisque $x\notin\mathbb{N}$.
Considérons alors $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$. φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $0,1,\ldots,n$ et aussi en x. Cela fournit $n+2$ annulation dans $[0,n]$. Par application du théorème de Rolle, φ' s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,n]$ et en reprenant ce processus, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans $[0,n]$ en un certain ξ. Or $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-0-(n+1)!K$ car $\deg P_f\le n$ et N est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc $N^{(n+1)}=(n+1)!$. La relation $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ donne alors $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ce qui permet de conclure.

3.b Pour $x\in\mathbb{N}\cap[0,n]$, $\left|f(x)-P_f(x)\right|=0\le\dfrac{1}{n+1}M_{n+1}$.
Pour $x\in[0,n]$, $x\notin\mathbb{N}$: $\left|f(x)-P_f(x)\right|=\dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|N(x)\right|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|N(x)\right|$.
Pour conclure, il reste à établir : $\forall x\in[0,n],\left|N(x)\right|\le n!$.
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $N(x)=x$ et la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n\ge 1$:
Pour $x\in[0,n+1]$, étudions $N(x)=x(x-1)\times\ldots\times(x-(n+1))=M(x)\times(x-n-1)$.
Par HR, pour $x\in[0,n]$, on a $\left|M(x)\right|\le n!$ donc $\left|N(x)\right|\le n!\times\left|x-n-1\right|$ avec $\left|x-n-1\right|\in[1,n+1]$ donc $\left|N(x)\right|\le(n+1)!$. Pour $x\in[n,n+1]$,
$\left|N(x)\right|=x(x-1)\times\ldots\times(x-n)\times(n+1-x)\le(n+1)n\times\ldots\times1\times1=(n+1)!$. Récurrence établie et problème résolu.

Correction du concours blanc 2018 (sujet 1)

Problème 2

1. (a) Comme P est continue sur $\mathbb{R}$, on note A une primitive de P sur $\mathbb{R}$. On cherche une primitive B de P telle que $\int_0^1 B = 0$. Cependant, $\int_0^1 (A+\lambda) = 0$, donne $\lambda = -\int_0^1 A$. On pose $B = A - \int_0^1 A$, ainsi B est l'unique primitive de P telle que $\int_0^1 B = 0$.

   (b) On a $\deg B = p+1$ et le coefficient dominant de B est $\dfrac{a_p}{p+1}$ (en écrivant $P = a_p X^P + \cdots + a_0$, on trouve $B = \dfrac{a_p}{p+1}X^{p+1} + \cdots + a_0 X + \lambda$).

2. (a) D'après la question 1.b et par récurrence, on trouve $\deg B_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) B_0 est unitaire. On suppose que B_{n-1} est unitaire. On note $B_n = \lambda X^n + \cdots$, on a $B_n' = n\lambda X^{n-1} + \cdots = nB_{n-1}$. Comme B_{n-1} est unitaire, on trouve $\lambda = 1$, c'est-à-dire B_n est unitaire. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, B_n est unitaire.

   (c) D'après la question 2.b, les polynômes B_n sont uniques.

   (d) On pose $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a $Q_0 = B_0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$Q_n'(X) = (-1)^{n+1}B_n'(1-X) = n(-1)^{n-1}B_{n-1}(1-X) = nQ_{n-1}(X).$$

   De plus, en effectuant le changement de variable $t = 1-x$, on trouve :

$$\int_0^1 Q_n(x)dx = (-1)^n\int_0^1 B_n(1-x)dx = -(-1)^n\int_1^0 B_n(t)dt = (-1)^n\int_0^1 B_n(t)dt = 0.$$

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n vérifie la propriété (2). Par unicité de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $Q_n = B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (e) De même que pour la question précédente, on pose $Q_n(X) = 2^{n-1}\Big(B_n\big(\frac{X}{2}\big)+B_n\big(\frac{X+1}{2}\big)\Big)$. On a $Q_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$Q_n'(X) = 2^{n-1}\Big(\frac{1}{2}B_n'\big(\frac{X}{2}\big)+\frac{1}{2}B_n'\big(\frac{X+1}{2}\big)\Big) = 2^{n-2}\Big(nB_{n-1}\big(\frac{X}{2}\big)+nB_{n-1}\big(\frac{X+1}{2}\big)\Big) = nQ_{n-1}(X).$$

   De plus, en effectuant les changements de variables $t = \dfrac{x}{2}$ et $t = \dfrac{x+1}{2}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n(x)dx &= 2^{n-1}\int_0^1 B_n\big(\frac{x}{2}\big)dx + 2^{n-1}\int_0^1 B_n\big(\frac{x+1}{2}\big)dx\\ &= 2^{n-1}\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(t)dt + 2^{n-1}\int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(t)dt\\ &= 2^{n-1}\int_0^1 B_n(t)dt = 0\end{aligned}$$

   Ainsi, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (2), donc, par unicité, $Q_n = B_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. (a) On a $B_0 = 1 = \binom{0}{0}b_0$, car $b_0 = 1$. Supposons que la formule est vraie au rang $n-1$. On a $B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_{n-1-k}X^k$. Par conséquent, une primitive est :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k}b_{n-1-k}X^{k+1} + \lambda.$$

De plus, $B_n(0) = b_n$, d'où $\lambda = b_n$ et $\dfrac{n}{k+1}\dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n}{k+1}$. En effectuant un changement d'indice, on trouve :

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k} b_{n-1-k}X^{k+1} + b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1} b_{n-1-k}X^{k+1} + b_n \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}X^k + b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k}X^k \end{aligned}$$

Ainsi, la formule est vraie au rang n.

(b) On obtient $B_1 = X + c$, mais $\displaystyle\int_0^1 B_1 = 0$, d'où $c = -\dfrac{1}{2}$. De même, on a $B_2 = X^2 - X + d$ et $\displaystyle\int_0^1 B_2 = 0$ donne $d = \dfrac{1}{6}$. Enfin, on trouve $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$. Donc $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{1}{6}$ et $b_3 = 0$.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule (3), pour $X = \dfrac{1}{2}$ et $n = 2p+1$, on a $B_{2p+1}(1/2) = -B_{2p+1}(1/2)$, d'où $B_{2p+1}(1/2) = 0$. De plus, d'après la formule (4), pour $X = 0$ et $n = 2p+1$, on trouve $B_{2p+1}(0) = 2^{2p}(B_{2p+1}(0) + B_{2p+1}(1/2)) = 2^{2p}B_{2p+1}(0)$, avec $2^{2p} \neq 1$, donc $B_{2p+1}(0) = b_{2p+1} = 0$.

(d) Soit $p \geqslant 1$. D'après la formule (3), pour $X = 0$ et $n = 2p$, on trouve $B_{2p}(0) = B_{2p}(1)$. De plus, pour $X = 1$ et $n = 2p+1$ dans la formule (4), on obtient $B_{2p+1}(1) = 2^{2p}(B_{2p+1}(1/2) + B_{2p+1}(1)) = 2^{2p}B_{2p+1}(1)$, car $B_{2p+1}(1/2) = 0$. Donc $B_{2p+1}(1) = 0 = B_{2p+1}(0)$. Dans tous les cas, on a $B_n(1) = B_n(0)$, pour $n \geqslant 2$.

(e) D'après la question précédente, $b_{2p+2} = B_{2p+2}(0) = B_{2p+2}(1)$. Cependant, la formule démontrée à la question 3.a permet d'obtenir $B_{2p+2}(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2p+2}\binom{2p+2}{k} b_{2p+2-k}$. De plus, $\dbinom{2p+2}{k} = \dbinom{2p+2}{2p+2-k}$, puis en effectuant le changement d'indice $i = 2p+2-k$, on obtient :

$$b_{2p+2} = \sum_{k=0}^{2p+2}\binom{2p+2}{2p+2-k} b_{2p+2-k} = \sum_{i=0}^{2p+2}\binom{2p+2}{i} b_i.$$

(f) En utilisant la relation de Chasles dans la somme précédente et le fait que $b_{2k+1} = 0$, pour $k \geqslant 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} b_{2p=2} &= \sum_{k=0}^{2p-2}\binom{2p+2}{k} b_k + \binom{2p+2}{2p-1} b_{2p-1} + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + \binom{2p+2}{2p+1} b_{2p+1} + \binom{2p+2}{2p+2} b_{2p+2} \\ &= \sum_{k=0}^{2p-2}\binom{2p+2}{k} b_k + \binom{2p+2}{2p} b_{2p} + b_{2p+2} \end{aligned}$$

Comme $\dbinom{2p+2}{2p} = (p+1)(2p-1)$, en simplifiant les b_{2p+2} dans l'égalité précédente, on trouve $b_{2p} = -\dfrac{1}{(p+1)(2p+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-2}\binom{2p+2}{k} b_k$.

(g) Avec la formule précédente, Il vient $b_4 = -\dfrac{1}{15}\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\binom{6}{k} b_k = -\dfrac{1}{15}(1 - \dfrac{6}{2} + \dfrac{15}{6}) = -\dfrac{1}{30}$