Ibn Sina Sup
Prepas MP

Prof. MANOUNI
myismail.net

Préparation Concours
Algèbre linéaire (Polynômes)

Partie I : Polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tq $a_i \neq a_j$ $\forall i \neq j$

on pose $\boxed{L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}}$

1. Justifier que $\deg L_i(X) = n-1$ $\forall 1 \leq i \leq n$

2. Mq $L_i(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

3. En déduire que $\beta = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}(X)$

4. Mq $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}(X)$, on a $P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i(X)$

5. (i) Donner $P_{\beta \to \mathcal{C}}$ où $\mathcal{C} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ base de $\mathbb{R}_{n-1}(X)$

   (ii) En déduire que la matrice V dite de Van Der Monde est inversible où $V = (a_i^{j-1})_{1 \leq i,j \leq n}$

⑥ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mq $\exists! \, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tq $f(a_i) = P(a_i)$ $\forall_{1 \leq i \leq n}$

On dit alors que P interpolle f aux pt $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$

⑦ on suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ fixé on pose

$$g(x) = f(x) - P(x) - \lambda \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \quad \text{tq } g(t) = 0$$

i) exprimer λ en fct $f(t)$, $P(t)$ et $\prod_{i=1}^{n} t - a_i$

ii) Verifier que $g(a_i) = 0$ $\forall_{1 \leq i \leq n+1}$ où $a_{n+1} = t$

iii) En deduire que g' s'annulle au moins n fois sur $\mathbb{R}$

iv) En deduire que $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $g^{(n)}(c) = 0$

v) En deduire que $\lambda = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$

puis que $f(t) - P(t) = \dfrac{g^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^{n} t - a_i$

vi) Conclure que

$$\|f - P\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} (b - a)^n$$

où $a = \min (a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$, $b = \max (a_i)_{1 \leq i \leq n+1}$

et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Partie II / Polynoms de Tchebechev

on pose $\boxed{\begin{array}{l} T_0(X)=1, \quad T_1(X)=X \\ T_{n+1}(X) = 2X T_n(X) - T_{n-1}(X) \end{array}}$

1) Mq $T_n(X) \in \mathbb{R}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Mq $\deg T_n(X) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Mq $cd(T_n) = 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

4) Mq $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5) En deduire $(a_k)_{1 \le k \le n}$ les racines de $T_n(X)$

6) En deduire que $T_n(X)$ est scindé à racines simples

7) Mq $\cos(n\theta) = R(e^{in\theta}) = \sum_{k=0}^{(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (1-\cos^2\theta)^k$

8) En deduire que $T_n(X) = \sum_{k=0}^{(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k$

$$= \sum_{k=0}^{(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p} X^{n-2k-2p}$$

$$= \sum_{p=0}^{(n/2)} (-1)^p \left(\sum_{k=p}^{(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} \binom{k}{p} X^{n-2k-2p} \right)$$

(9) Soit $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ les solutions sur $[-1,1]$ de $T_n(x)=0$
$1\leq k\leq n$

(i) Mq $T_n(x)$ atteint ses extremums sur $[-1,1]$
aux pt $y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ $0\leq k\leq n$

(ii) vérifier que $T_n(y_k) = (-1)^k$ $\forall\, 0\leq k\leq n$
puis que $\|T_n\|_\infty = 1$
ici $\|f\|_{\infty,} = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$

(10) Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpolle une fct $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
de classe C^n aux pt $(x_k)_{1\leq k\leq n}$

mq $\boxed{\|f-P\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{1}{2^{n-1}n!}}$

(11) Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui interpolle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
de classe C^n en d'autre pt $(a_k)_{1\leq k\leq n} \in [-1,1]$

on pose $R(X) = \prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$

Supposons que $\|R_n\|_{\infty,[-1,1]} < 1/2^{n-1}$

(i) Calculer $\frac{T_n(y_k)}{2^{n-1}} - R_n(y_k)$ $\forall\, 0\leq k\leq n$

(ii) En deduire que $\frac{T_n}{2^{n-1}}(X) - R(X)$ change de signe $n+1$ fois

iii) En deduire que $\frac{T_n}{2^{n-1}}(X) - R(X)$ admet au moins n racine ds $[-1,1]$

iv) Justifier que $\deg\left(\frac{T_n}{2^{n-1}} - R_n\right) \leq n-1$

v) Conclure que $R_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}$

vi) En deduire une contradiction, puis conclure

Partie III / Polynoms Factoriels

on pose $N_0(X) = 1$

$$N_n = \frac{X(X-1)\ldots(X-(n-1))}{n!} = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)/n!$$

1) Mq $(N_0, \ldots, N_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

3) Verifier que $N_k(X+1) - N_k(X) = N_{k-1}(X)$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

Partie IV / Operateur de differences finis

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$

1) Mq $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$ est lineaire

2) Calculer $\Delta(X^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(3) En déduire que $\deg(\Delta(X^n)) = n-1$

$\mathrm{cd}(\Delta(X^n)) = n$

(4) En déduire que $\mathbb{R}_n(X)$ est stable par Δ

on note $\Delta_{|\mathbb{R}_n(X)}$ l'endom induit

pour des raisons de simplicité $\Delta_{|\mathbb{R}_n(X)}$ sera noté aussi Δ

(5) (i) Mq $\deg(\Delta^k(P)) = \deg P - k$ $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall k \in \mathbb{N}$

où $\Delta^k = \underbrace{\Delta \circ \dots \circ \Delta}_{k \text{ fois}}$

(ii) En déduire que $\Delta^{n+1}(P) = 0$ $\forall P \in \mathbb{R}_n(X)$

(iii) Vérifier que $\Delta^n(X^n) \neq 0$

(iv) En déduire que $\Delta_{|\mathbb{R}_n(X)}$ est nilpotent d'indice n

(6) Calculer $\mathrm{Mat}_{\beta}(\Delta_{|\mathbb{R}_n(X)})$ où $\beta = (N_0, \dots, N_n)$ (Partie II)

(7) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ matrice dite de Jordan

en utilisant Q6 Partie II Mq $J^k = \begin{pmatrix} 0 & \overbrace{\cdots}^{k \text{ fois}} & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

en déduire que $J^n = 0$ et $J^{n-1} \neq 0$

càd J nilpotente d'indice n

Partie V / Operateur translation

$\forall P \in \mathbb{R}(X)$ On pose $TP(X) = P(X+1)$

1) Mq T est lineaire

2) Verifier que $T^k P(X) = P(X+k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

où $T^k = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{k \text{ fois}}$

3) On deduire que $\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$ $\forall P \in \mathbb{R}(X)$

on pourra utiliser $\Delta = T - id_{\mathbb{R}(X)}$

4) Donner $\underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}(T)$ où $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$

5) on pose $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ & \binom{1}{1} & & \binom{n}{1} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

i) Justifier que $M \in Gl_n(\mathbb{R})$

ii) Donner M^{-1} on pourra utiliser V. 4

6) Soit $(x_k)_{0 \le k \le n}$ et $(y_k)_{0 \le k \le n}$ tq $\cancel{y_{n-i} = \sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i} x_j}$

tq $\boxed{y_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} x_i}$

Autrement dit

$$(S) \begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = \binom{1}{0} x_0 + \binom{1}{1} x_1 \\ \vdots \\ y_n = \binom{n}{0} x_0 + \dots + \binom{n}{0} x_n \end{cases}$$

7

(i) Mq $(S) \Leftrightarrow Y = AX$ où $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = {}^tM$, $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}Y$

(ii) En deduire que $\boxed{x_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} y_j}$ $\forall 0 \leq i \leq n$

formule d'inversion de Mobuis

(7) Une application : les derangements

on note $S_n = \{\sigma : [\![1,n]\!] \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ permutation}\}$

$D_k = \{\sigma \in S_k \text{ tq } \sigma(i) \neq i \quad \forall 1 \leq i \leq k\}$

où $1 \leq k \leq n$

on rappelle que $\text{Card}(S_n) = n!$

et on pose $d_k = \text{Card}(D_k)$ et $d_0 = 0$

(i) Mq $n! = \text{Card}(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_k$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$

indication

$\sigma \in S_n \Leftrightarrow \sigma$ admet k pt fixe $0 \leq k \leq n$

(ii) En deduire que $d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$

puis que $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1}$

(iii) Enoncer et demontrer le theoreme des chapeaux

Partie VI Une application

1) En utilisant les notations et questions des parties III et IV

Mq $\Delta^k(N_i) = \begin{cases} N_{i-k} & \forall\, 0 \leq k \leq i \\ 0 & \forall\, k > i \end{cases}$

2) En deduire autrement que $\Delta_{|\mathbb{R}_n(X)}$ est nilpotente d'indice n

3) Mq $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k P(0) N_k(X)$

4) i) En deduire la forme de $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}}$ où $\mathcal{C} = (1, X, \dots, X^n)$

$\mathcal{B} = (N_0, \dots, N_n)$

ii) Donner explicitement P pour $n = 2$

iii) En deduire " les coefficients de $N_2(x)$

iv) Dire comment generaliser pour trouver les coeff de N_k en gle

9

FIN

ET BONNE CHANCE