

Espaces Préhilbertiens

Thème : Racine carrée d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 2$)

On se propose ici d'étudier l'existence et unicité de $B \in M_n(K)$ tq $B^2 = A$

en cas d'existence de B , on l'appelle une racine carrée de A

" " " et unicité de B , on l'appelle la racine carrée de A et on la note $\sqrt{A}$

Partie I : Préliminaires

1) i) Mq l'eq $B^2 = -I_3$ n'admet pas de sol

ii) Que peut-on conclure

2) i) Calculer B^2 où $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$

ii) Que peut-on conclure

3) i) Mq si B existe et B diagonalisable alors A l'est aussi

ii) Mq la réciproque n'est pas tr vraie

Indic: Considérons B de I-2.i

①

Partie II : Cas diagonalisable

- i) on suppose ici que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable
- ii) Mq $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mu \in \mathbb{C} \text{ tq } \lambda = \mu^2$
- iii) En deduire que $\exists B \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq } B^2 = A$
- 2) Mq le resultat ^{II.1} est encore vrai si $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable
- avec $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$
- 3) le resultat II.2 est-il encore vrai si
 $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec A diagonalisable

Partie III : Cas Symétrique définie positive

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique définie positive
ssi $\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ i.e. } {}^t A = A \\ {}^t X A X > 0 \quad \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n \text{ avec } X \neq 0 \end{array} \right.$
on note alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On admet ici le résultat suivant

Thm spectral: $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale
tq $A = P D P^{-1}$ avec $P^{-1} = {}^t P$

- 1) Mq ce résultat n'est pas vraie pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$

indic: utiliser B de I.2.ii

- 2) Mq si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
Alors ${}^t X D X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

(2)

3) En deduire que $\boxed{A \in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \mathcal{J}_n(\mathbb{R}) \\ \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\end{cases}}$

4) En deduire que $\boxed{\mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})}$

5) Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tq $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$ et $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

i) Mg l'app $\varphi: \mathbb{R}_{n-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isom
 $\varphi(x) \mapsto (\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n))$

ii) En deduire que $\exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}(x)$ tq $\sqrt{\lambda_i} = Q(\lambda_i)$

iii) On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Mg $\Delta = Q(D)$

6) Mg le resultat de II.5. ⁱⁱⁱ⁾ est encore valable si on enlève l'hypothèse $\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j$

7) Soit $A \in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R})$ selon le thm spectral
 $A = PDP^{-1}$ tq $P^{-1} = {}^tP$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

i) Dire pourquoi $\lambda_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

ii) On pose $B = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

Mg $\boxed{\begin{aligned} B^2 &= A \\ B &\in \mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ B &= Q(A) \end{aligned}}$

iii) Que peut-on conclure

8) Soit $A \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une autre matrice $C \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $C^2 = A$

i) Mg $AC = CA$

ii) En deduire que $BC = CB$

iii) Justifier que $(B-C)(B+C) = 0$

iv) Mg $B+C \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$

v) En deduire que $B+C \in GL_n(\mathbb{R})$

vi) Conclure que $B=C$

9) Selon III-7 et III-8 on a montré que
 $\forall A \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R}) \quad \exists ! B \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $B^2 = A$

on pose $B = \sqrt{A}$

i) Mg $\sqrt{A}$ est inversible et que $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A}^{-1}$

ii) Mg $\forall k \in \mathbb{N} \quad \sqrt{A}^k = (\sqrt{A})^k$

iii) Not ouverte A-t-on

$\sqrt{AA'} = \sqrt{A} \sqrt{A'}$ si $A, A' \in \mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{R})$

Indic: Mg si $AA' = A'A$ alors le résultat est vrai

(utiliser simultanément le thème: diagonalisable)

puis étudier la réciproque

FIN

Partie IV / Décomposition plane

on fixe dans cette partie ~~$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$~~
 $A \in GL_n(\mathbb{R})$

1) Mq ${}^t A \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

2) On pose $S = \sqrt{{}^t A \cdot A} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\underline{\text{q}} S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
et $O = A \cdot S^{-1}$ et $S^2 = {}^t A \cdot A$

i) Mq $O \in O(n)$

ii) Mq $A = OS$ (Décomposition plane)
existence

3) On suppose que $A = O' S'$ tq $O' \in O(n)$
 $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

i) Vérifier que $(S')^2 = {}^t A \cdot A$

ii) En deduire que $S = S'$ puis que $O = O'$
(unicité de la décomposition plane)

4) on pose $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$
 $A \mapsto (O, S)$

i) Mq f est bien définie et bijective

ii) Mq f est continue. Indic utiliser $O(n)$ compact

iii) Mq f^{-1} est continue

5) Mq la décomposition plane existe aussi pour
 $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ mais n'est pas unique

Indic: utiliser I.3.i.a

I.2.iii

III.2.ii

FIN

(5)