Préparation aux Concours

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Espaces Préhilbertiens

Thème : Déterminants de Gram

Soit E un euclidien tq $\dim E = n \geq 2$

Soit $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille d'élts de E

on pose $\boxed{G(x_1, \dots, x_p) = \left(\langle x_i, x_j \rangle\right)_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

matrice de Gram associée à la famille $\mathcal{C}$

I) Préliminaires

1) On suppose $\mathcal{C}$ est liée, montrer que $\det(G(\mathcal{C})) = 0$

2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E

on pose $A = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}}$ matrice où on exprime $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$

i) Mq $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ tq $a_{ij} = \langle e_i, x_j \rangle$

ii) En déduire que $G = {}^tA . A$ où $G = G(x_1 \dots x_p)$

iii) Mq $\operatorname{Ker} G = \operatorname{Ker} A$

iv) En déduire que $rg(\mathcal{C}) = rg(G)$

3) En déduire que $\mathcal{C}$ libre $\Rightarrow \det G \neq 0$

Conclure

II) Gram et Calcul de distance

Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots x_p)$ un sev de E tq $\mathcal{E} = (x_1 \dots x_p)$ libre donc $\dim F = p$

1) Mq $sp_{\mathbb{R}}(G) \subset]0, +\infty[$ où $G = G(x_1 \dots x_p)$

indic : utiliser I-2-ii)

2) En deduire que $\det G > 0$

3) Soit $x \in E$ fixe

i) Mq $\det(G(x_1, \dots, x_p, P_F(x))) + (\det G(x_1, \dots, x_p))\|P_F(x) - x\|^2$

$$= \det(G(x_1, \dots, x_p, x))$$

indic : utiliser la multilinearité du det en raisonnant sur la derniere colonne

ii) Justifier que $\det G(x_1, \dots, x_p, P_F(x)) = 0$

iii) En deduire que $d^2(x, F) = \dfrac{\det(G(x_1, \dots, x_p, x))}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$

4) CNC 2019 : On pose $\boxed{\Delta_n = \det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \le i,j \le n}}$ tq $a_i \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$ et $a_i + b_j \neq 0$

$\boxed{\text{det de Cauchy}}$

le CNC mq $\boxed{\Delta_n = \dfrac{\prod_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \le i,j \le n} a_i + b_j}}$

Donner $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])$ pour $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Partie II : Qlq réciproques du thm de Bessel

on rappelle que si $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E

Alors $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \quad \forall x \in E}$ $(*)$

1) Soit $\beta = (e_1, \dots e_n)$ une famille de E verifiant $(*)$

N.B ici $\operatorname{Card} \beta = n = \dim E$

i) Mq $\operatorname{Vect}(\beta)^{\perp} = \{0\}$

ii) En deduire que β base de E

iii) Mq $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \quad \forall x, y \in E$

iv) En deduire que $G^2 = G$ où $G = G(e_1, \dots, e_n)$

v) Conclure que β BON de E

2) Soit $\beta = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de verifiant $(*)$

NB ici $\operatorname{Card} \beta = p$

tq $\|e_i\| = 1 \quad \forall\, 1 \leq i \leq p$

i) Mq $\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

ii) En deduire que β est libre

iii) Mq $\operatorname{Vect}(\beta)^{\perp} = \{0\}$ puis que β base de E

iv) En deduire que $n = p$ puis que β BON de E

FIN