Préparation Concours (CNC-CCP)

Réduction

Thm 1 Trigonalisation simultanée .
Montrer que si $AB = 0$, alors A et B sont simultanément trigonalisables.

Thm 2 Diagonalisation simultanée.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E, qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_q$) les valeurs propres de u (resp. de v), et $F_1, \ldots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \ldots, G_q$).

1. Dire pourquoi chaque G_j (resp. F_i) est stable par u (resp. v)

2. On pose $H_{i,j} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$.
   a. Montrer que $H_{i,j} \cap \sum_{k \neq j} H_{i,k} = 0$.
   b. Soit $x \in F_i$, justifier l'existence des $x_j^i n G_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_q$.
   c. Calculer $u(x)$ de deux façons, en déduire que $x_j \in F_i$.
   d. Conclure que $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{i,j}$.

3. En déduire l'énoncé suivant :

   Lorsque deux endomorphismes diagonalisables u et v commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v (en d'autres termes, u et v sont diagonalisables simultanément dans la même base).

4. Deuxième méthode :
   a. Dire pourquoi les sous-espace vectoriel G_j sont stable par u.
   b. En déduire que $u_{|G_j}$ est diagonalisable.
   c. En déduire qu'il existe une base formée de vecteurs propres communs à u et à v

5. Application Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables qui commutent.
   a. Montrer qu'il existe P inversible et D, D' diagonales, telle que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.
   b. En déduire que $A + B, A - B$ et AB sont diagonalisable.

Exo 25 Décomposition de Dunford .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer qu'il existe deux matrices uniques D, N telles que $A = D + N$, D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$. Pour cela on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}$ associé à la matrice A dans une base donnée de E, on pose $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ et enfin $u_i = u|_{F_i}$.

1. Existence : a) Dire pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
   b) Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ une base adaptée à cette somme, que peut-on dire de la forme de $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
   c) Montrer que $u_i - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$ est nilpotent.
   d) Soit $B_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(u_i)$, montrer que $B_i = D_i + N_i$ avec D_i matrice scalaire et N_i nilpotente.
   e) En déduire l'existence de la décomposition de Dunford.

2. Unicité :
   Soit $A = D' + N'$ une autre décomposition de Dunford. On pose $D' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(d')$ et $N' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(n')$.
   a) Montrer que $AD' = D'A$
   b) En déduire que les E_i sont stables par d'.
   c) Que peut-on dire de la forme de D'.
   d) En déduire que $DD' = D'D$, puis que $D - D'$ est diagonalisable.
   e) En déduire que $D = D'$, puis conclure.

Exo 26 Centrale MP 2003.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathbb{L}E$. On considère l'application

$$\Phi_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

2. On se propose de montrer l'équivalence suivante : (u est diagonalisable) $\iff$ Φ_u est diagonalisable)
   a) 1ère méthode :
      i) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $v \in \mathcal{L}(E)$, on a
      $$P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$$
      ii) En déduire que u et Φ_u ont mêmes polynômes annulateurs, puis conclure.
   b) 2ème méthode :
      i) Montrer que $\lambda \in^(\Phi_u) \iff u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif.
      ii) En déduire que $^(\Phi_u) =^(u)$.
      iii) Soit $\lambda \in^(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\Phi_u(v) = \lambda v)$. Montrer que :
         α) Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \ker v)$.
         β) $\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{L}E})$ est isomorphe $\mathcal{L}H, E$ où H est un supplémentaire de Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
         γ) $\dim(\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E) \dim(\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$
      iv) Conclure.