Préparation aux Concours (CCP-CNC)

Crochet de Lie

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i-ème ligne et à la j-ième colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$ ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.

On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA.$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de φ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de φ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres. **Les quatre parties sont indépendantes.**

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4. En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.

5. Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1} .$$

(a) Exprimer, pour tout couple (i, j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

(b) Démontrer que, pour tout couple (i, j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

(c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

7. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i, j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

(a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de ${}^tA$.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\bar{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$), tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \bar{z}Y$.

En calculant $\varphi_A(X{}^tY)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de φ_A.

(b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

(c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

(d) En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8. Démontrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$.

10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

(a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que si $v(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

(c) En déduire $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

(b) En déduire que $B \in \mathrm{Ker}(\varphi_A)$ si et seulement si, la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

(c) Préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$.

(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$.

13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal π_B de la matrice B).

15. En déduire que $B^d = 0$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1233 – D'après documents fournis

CCP 2012. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice

1. D'après le théorème de Fermat (puisque 11 est premier et que 11 ne divise pas 3) on a $3^{10} \equiv 1$ modulo 11.
Si $10 = pq + r$ est la division euclidienne de 10 par p on a $3^{10} \equiv 3^r$ donc $3^r \equiv 1$ avec $0 \leqslant r < p$ donc $r = 0$ par définition de p. Ainsi p divise 10 donc $p = 1, 2, 5$ ou 10.
Or $3^2 \equiv -2$ donc $3^4 \equiv 4$ et $3^5 \equiv 3 \times 4 = 12 \equiv 1$. Ainsi $p = 5$ $\square$

2. $2012 = 10 \times 201 + 2$ donc $3^{2012} = \left(3^{10}\right)^{201} \times 3^2 \equiv 9$ et ainsi $3^{n+2012} \equiv 9 \times 3^n$
Par ailleurs $5^{2n} = 25^n \equiv 3^n$ donc $9 \times 5^{2n} \equiv 9 \times 3^n$ $\square$

Problème

Partie I : Étude du cas $n = 2$.

1. $\varphi_A(\lambda M + N) = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$ clairement et non moins clairement I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker}\varphi_A$. $\square$

2. Il vient $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de φ_A dans la base $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}\big)$ est $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$ $\square$

Remarque : Il en découle bien comme annoncé dans l'énoncé que φ_A est l'endomorphisme nul si et seulement si $b = c = 0$ et $a = d$ soit si et seulement si $A = \lambda I_2$.

3. En remplaçant la première colonne C_1 de $\operatorname{Det}(XI_4 - U)$ par $C_1 + C_2$ on factorise X dans la première colonne. Puis en remplaçant la seconde ligne L_2 par $L_2 - L_1$ et en développant par rapport à la première colonne dont seul le premier terme est non nul il vient :

$\chi_{\varphi_A}(X) = X \begin{vmatrix} X & -2c & 2b \\ -b & X-(a-d) & 0 \\ c & 0 & X+(a-d) \end{vmatrix} = X\Delta(X)$. En développant par la règle de Sarrus il vient :

$\Delta(X) = X(X^2 - (a-d)^2) - 2bc(X - (a-d)) - 2bc(X + (a-d)) = X(X^2 - (a-d)^2) - 4bcX$.

Ainsi $\chi_{\varphi_A}(X) = X^2\Big(X^2 - \big((a-d)^2 + 4bc\big)\Big)$ $\square$

4. Si $(a-d)^2 + 4bc < 0$ alors φ_A admet 2 valeurs propres non réelles donc n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Si $(a-d)^2 + 4bc = 0$ alors $\chi_{\varphi_A}(X) = X^4$ donc φ_A est diagonalisable si et seulement si $\varphi_A = 0$ ce qui n'est pas par hypothèse.
Si $(a-d)^2 + 4bc > 0$ alors φ_A admet deux valeurs propres réelles non nulles de multiplicité 1 et 0 comme valeur propre double. Donc $\dim\ \operatorname{Ker}\varphi_A \leqslant 2$ et φ_A est diagonalisable si et seulement $\operatorname{Ker}\varphi_A$ est de dimension 2. Or I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker}\varphi_A$ et sont linéairement indépendantes par hypothèse. Donc $\dim\ \operatorname{Ker}\varphi_A \geqslant 2$ et donc $\dim\ \operatorname{Ker}\varphi_A = 2$ et ainsi φ_A est bien diagonalisable.

En conclusion si $A \neq \lambda I_2$ alors φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$. $\square$

5. $\chi_A(X) = X - (a+d)X + ad - bc$ dont le discriminant a pour valeur $(d-a)^2 + 4bc$.
Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$ pas de valeurs propres réelles donc A n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.
Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$ alors A admet une seule valeur propre λ d'ordre 2 donc n'est pas diagonalisable. En effet si elle l'était elle serait semblable à λI_2 donc égale λI_2 ce qui n'est pas par hypothèse.
Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$ alors A admet deux valeurs propres réelles distinstes donc est diagonalisable.

Ainsi φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est. $\square$

Partie II : Étude du cas général.

6. a) Si M est une matrice quelconque, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la colonne j qui constitué de la colonne i de M de sorte que $DE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$.
De même $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la ligne i qui constitué de la ligne j de M de sorte que $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$.
Ainsi $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ $\square$

b) Ce qui s'écrit encore $P^{-1}APE_{i,j} - E_{i,j}P^{-1}AP = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$ et en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} il vient $AB_{i,j} - B_{i,j}A = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$ $\square$

c) Comme l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les n^2 matrices $B_{i,j}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi les matrices $B_{i,j}$ forment une base de vecteurs propres pour φ_A qui de ce fait est diagonalisable. $\square$

7. a)• Comme φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toutes ses valeurs propres sont réelles. $\square$

- A et ${}^tA$ ont même polynôme caractéristique. $\square$
- $\varphi_A(X^tY) = AX^tY - X^tYA = AX^tY - X^t({}^tAY) = zX^tY - X\overline{z}\ {}^tY = (z-\overline{z})X^tY$.

Or si $M = X^tY$ il vient avec des notations claires $m_{i,j} = x_iy_j$ de sorte que, comme X et Y sont non nuls, l'un au moins des coefficients de X^tY est non nul donc $X^tY \neq 0$ et ainsi $z - \overline{z}$ est bien valeur propre de φ_A. $\square$

b) Si A admet une valeur propre complexe non réelle z alors, comme A est réelle (donc son polynôme caractéristique à coefficients réels) $\overline{z}$ est également valeur propre de A. La question précédente peut donc s'appliquer et il en découle que φ_A admet une valeur propre imaginaire pure ce qui n'est pas puisque par hypothèse φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable. Ainsi si φ_A est $\mathbb{R}$-diagonalisable alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. $\square$

c) De $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$ et $AX = \lambda X$ on tire $AP_{i,j}X = P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X$ $\square$

d) Comme $\big(P_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que X est non nul, vect $\big(P_{i,j}X\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} =$ vect $\big(MX\big)_{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$
En effet l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\phi(M) = MX$ est linéaire et surjective : si Y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$ il existe un endomorphisme transformant X en Y (comme $X \neq 0$ on peut le compléter en une base $\mathcal{B}$ et il suffit de considérer l'endomorphisme défini par le fait qu'il s'annule sur tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sauf en X transformé en Y).
Donc il existe au moins n couples (i_k, j_k) tels que $\big(P_{i_k,j_k}X\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
La question c) prouve alors que c'est une base de vecteurs propres de A. $\square$

Ainsi φ_A est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Partie III : Étude des vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

8. La famille est libre car si $\sum\limits_{k=0}^{m-1} a_kA^k = 0$ alors le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{m-1} a_kX^k$ annule A donc est nul car de degré strictement inférieur à m.
En outre si P est un polynôme quelconque et $P = \Pi Q + R$ la division euclidienne de P par le polynôme minimal Π, il vient d'après le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $P(A) = \Pi(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ donc $P(A) \in \mathbb{R}_{m-1}[A]$ et ainsi la famille est bien génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Ainsi la famille $(I_n, A, \ldots, A^{m-1})$ est bien une base de $\mathbb{R}[A]$. $\square$

9. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(A)$ qui commute avec A donc $\mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{m-1}[A] \subset \operatorname{Ker}\varphi_A$ donc dim $\operatorname{Ker}\varphi_A \geqslant m$. $\square$

10. *Un cas d'égalité.*

a) Si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_ie_i = 0$ c'est à dire $\lambda_1u^{n-1}(y) + \lambda_2u^{n-2}(y) + \ldots + \lambda_ny = 0$ il vient en composant par u^{n-1} que $\lambda_n = 0$ puis en composant par u^{n-2} que $\lambda_{n-1} = 0$. Itération claire.
Ainsi la famille est libre donc est bien une base de $\mathbb{R}^n$ car composée de n vecteurs. $\square$

b) Notons $w = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n-i}$. En vertu de la question précédente, pour prouver que $v = w$ il suffit d'établir que $v(e_i) = w(e_i)$ pour tout i de 1 à n c'est à dire encore $v\big(u^k(y)\big) = w\big(u^k(y)\big)$ pour tout k de 0 à $n-1$.
Or par définition des α_i on a $v(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n-i}(y) = w(y)$ (1) donc c'est bien vérifié pour $k = 0$.
En outre comme $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ on a v qui commute avec u donc avec u^k et ainsi de (1) on tire pour k de 1 à $n-1$:
$v\big(u^k(y)\big) = u^k\big(v(y)\big) = u^k\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n-i}(y)\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n+k-i}(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n-i}\big(u^k(y)\big) = w\big(u^k(y)\big)$
Ainsi on a bien $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_iu^{n-i}$ $\square$

c) On a vu dans les questions 8 et 9 que $\mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ est de dimension m et est toujours inclus dans $\operatorname{Ker}\varphi_A$.
La question précédente montre que lorsque A est nilpotente d'indice n alors $\operatorname{Ker}\varphi_A \subset \mathbb{R}_{m-1}(A)$.

Ainsi dans ce cas a-t-on $\operatorname{Ker}\varphi_A = \mathbb{R}(A) = \mathbb{R}_{m-1}(A)$ et est donc de dimension m. $\square$

11. *Cas où u est diagonalisable.*

a) $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si v commute avec u donc si et seulement si $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big)$ pour tout $x \in E_u(\lambda_k)$ et pour tout k de 1 à p puisque $\mathbb{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E_u(\lambda_p)$
Or pour $x \in E_u(\lambda_k)$ il vient $v\big(u(x)\big) = v\big(\lambda_k x\big) = \lambda_k v(x)$ donc $v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big)$ si et seulement si $v(x) \in E_u(\lambda_k)$.
Ainsi $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si tout sous-espace propre de A est stable par B. □

b) Donc $B \in \operatorname{Ker}\varphi_A$ si et seulement si, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, la matrice de v est une matrice triangulaire par blocs $\operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ où C_k est une matrice carrée d'ordre m_k. □

c) Il en découle que $d \underset{\text{DEF}}{=} \dim\ \operatorname{Ker}\varphi_A = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k^2$. □

d)
- Si $p = 7$ alors $m_k = 1$ pour tout k et $d = 7$.
- Si $p = 6$ alors quitte à changer la numérotation on a $m_1 = 2$ et $m_k = 1$ pour $k \geqslant 2$ donc $d = 9$
- Si $p = 5$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 1, 1, 1)$ ou $(2, 2, 1, 1, 1)$ donc $d = 13$ ou $d = 11$
- Si $p = 4$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4, 1, 1, 1)$ ou $(3, 2, 1, 1)$ donc $d = 19$ ou $d = 15$.
- Si $p = 3$ alors $(m_1, m_2, m_3) = (5, 1, 1)$ ou $(4, 2, 1)$ ou $(3, 3, 1)$ ou $(3, 2, 2)$ donc $d = 27$ ou $d = 21$ ou $d = 19$ ou $d = 17$.
- Si $p = 2$ alors $(m_1, m_2) = (6, 1)$ ou $(5, 2)$ ou $(4, 3)$ donc $d = 37$ ou $d = 29$ ou $d = 25$
- Si $p = 1$ alors $m_1 = 7$ et $d = 49$. □

Partie III : Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle.

12. La relation proposée est vraie pour $k = 0$ et pour $k = 1$. En outre en supposant qu'elle soit vraie au rang $k \geqslant 1$, en remarquant que $AB^{k+1} - B^{k+1}A = \big(AB^k - B^kA\big)B + B^k(AB - BA)$, on obtient qu'elle est vraie au rang $k + 1$.
Ainsi $\varphi_A(B^k) = k\alpha B^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ □

13. Par linéarité de φ_A on en déduit de suite que $\varphi_A\big(P(B)\big) = \alpha BP'(B) \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$ □

14. En particulier avec $P = \Pi_B$ le polynôme minimal de B, il vient $\alpha B\Pi'_B(B) = 0$ donc $X\Pi'_B$ annule B puisque $\alpha \neq 0$.
Donc $X\Pi'_B$ est multiple de Π_B et comme il est de même degré que Π_B on a $X\Pi'_B = \lambda\Pi_B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La considération des termes de degré d fournit alors $\lambda = d$.
Ainsi $X\Pi'_B = d\ \Pi_B$ □

15. En écrivant que $\Pi_B(X) = X^d + \sum\limits_{k=0}^{d-1} a_k X^k$ la relation précédente fournit $(k - d)a_k = 0$ pour k de 0 à $d - 1$ donc $a_k = 0$. Ainsi $\Pi_B = X^d$ et donc $B^d = 0$.

Si B est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle de φ_A alors B est nilpotente. □

FIN