

Préparation aux Concours (CCP-CNC)

Crochet de Lie

- Le but du problème est d'étudier certaines propriétés du crochet de Lie.
- Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{C}$ -algèbre des endomorphismes de E .
- Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, on note fg la composée $f \circ g$, et $[f, g]$ l'endomorphisme : $[f, g] = fg - gf$.
 Il pourra être utile de remarquer : $[f, g] = 0 \iff f$ et g commutent.
- Pour f et g dans $\mathcal{L}(E)$, on pose : $\psi_f(g) = [f, g]$. ψ_f est donc un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (on ne demande pas de le vérifier).
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et pour $f \in \mathcal{L}(E)$, f^{k+1} est défini par la relation : $f^{k+1} = f f^k$, et f^0 désigne l'automorphisme identité de E , noté Id_E .
- Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, et pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par : $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_d f^d$.

PARTIE A : Quelques résultats généraux.

1°) Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Montrer que f est nilpotent si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

2°) Soient f, g, h trois éléments de $\mathcal{L}(E)$. Établir l'égalité :

$$[fg, h] = [f, h]g + f[g, h]$$

Établir une égalité similaire pour $[f, gh]$.

3°) Soient f, g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Dans toute cette question, on fait l'hypothèse :

$$[f, [f, g]] = 0$$

et on pose : $h = [f, g]$.

a) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, on a : $[P(f), g] = P'(f)h$ (où P' est le polynôme dérivé de P) (on pourra d'abord le démontrer lorsque $P = X^k$, k entier).

b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$, établir l'égalité :

$$P^{(k)}(f)h^{2^k-1} = 0 \text{ (où } P^{(k)} \text{ est le polynôme dérivé d'ordre } k \text{ de } P)$$

(on pourra considérer le produit : $h^{2^k-1}[P^{(k)}(f)h^{2^k-1}, g]$, et raisonner par récurrence sur k).

c) En déduire que h est nilpotent.

4°) Dans toute cette question, f et g désignent deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f \text{ non nul, } f \text{ nilpotent, } [f, [f, g]] = 0$$

et on pose toujours : $h = [f, g]$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $N_k = \text{Ker}(f^k)$.

Montrer que, si x appartient à N_k , on a aussi $fg(x) \in N_k$ (utiliser 3.a).

- b) Soit x un vecteur propre non nul de fg , dont la valeur propre associée est notée λ , et soit k le plus petit entier strictement positif tel que $x \in N_k$.

Justifier l'existence de k .

Établir l'égalité: $hf^{k-1}(x) = \frac{\lambda}{k}f^{k-1}(x)$.

- c) En déduire que fg est nilpotent, puis que gf est nilpotent.
- d) Montrer qu'il existe un endomorphisme $g_1 \in \mathcal{L}(E)$ tel que fg_1 et g_1f ne soient pas nilpotents. En déduire que ψ_f n'est pas l'endomorphisme nul.

5°) Dans cette question, f désigne un endomorphisme nilpotent non nul, et p désigne son indice de nilpotence.

- a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Établir, pour tout entier $k \geq 1$:

$$(\psi_f)^k(g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^i$$

- b) En déduire que ψ_f est un endomorphisme nilpotent de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.
- c) Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uvu = u$.
En déduire que f^{p-1} appartient à l'image de l'endomorphisme $(\psi_f)^{2p-2}$, et en déduire l'indice de nilpotence de ψ_f .

PARTIE B : Étude de l'équation $[f, g] = \alpha g$

Dans toute cette partie, f et g désignent deux endomorphismes non nuls de E tels que :

$$[f, g] = \alpha g, \text{ où } \alpha \text{ est un complexe non nul}$$

- 1°) a) Montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}, fg^k - g^kf = \alpha k g^k$. En déduire $\psi_f(g^k)$.
- b) Montrer que, pour tout entier k , $\text{Ker}(g^k)$ est stable par f .
- c) On suppose: $\forall k \in \mathbb{N}^*, g^k \neq 0$. Que peut-on alors dire du spectre de ψ_f ?
En déduire que g est nilpotent.
- 2°) On suppose désormais que le rang de g est égal à $n - 1$.
- a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Quelle est la dimension de $\text{Ker}(g^k)$? Quel est l'indice de nilpotence de g ?
- b) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que, si l'on pose $x_k = g^{n-k}(x)$ pour tout entier $k \in [1, n]$, la famille $(x_1, \dots, x_k)$ soit, pour tout k , une base de $\text{Ker}(g^k)$.
- c) Montrer que x_1 est un vecteur propre de f , dont on notera λ la valeur propre associée.
Montrer que la matrice de f dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ est triangulaire supérieure.
- d) On note alors λ_i le terme d'indice (i, i) de cette matrice ($\lambda_1 = \lambda$).
Montrer que $\lambda_i = \lambda_{i-1} - \alpha$. En déduire que f est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.
- e) Montrer que, si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre μ différente de λ , alors $g(x)$ est un vecteur propre de f , dont on précisera alors la valeur propre associée.
- f) Soit e_n un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$. Pour tout entier $k \in [1, n]$, on pose: $e_k = g^{n-k}(e_n)$.
Montrer que $g^{n-1}(e_n) \neq 0$.
Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , et donner les matrices A et B de f et g dans cette base.

PARTIE C : Étude de l'équation $[f,g] = \alpha f + \beta g$

1°) Soient f, g deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Dans toute cette question, on fait l'hypothèse :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } [f, g] = \alpha f + \beta g$$

et on pose $h = [f, g]$.

a) Montrer que h est nilpotent.

Indication : Pour cela, on pourra commencer par envisager le cas $\beta = 0$ et utiliser alors la partie précédente; puis, dans le cas $\beta \neq 0$, on pourra considérer l'endomorphisme $g_1 = g + \frac{\alpha}{\beta}f$.

b) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Indication : Pour cela, on envisagera d'abord le cas $\alpha = \beta = 0$, puis le cas $\alpha \neq 0, \beta = 0$; enfin, dans le cas $\beta \neq 0$, on pourra calculer $[f, h]$.

2°) Soient f, g deux projecteurs distincts, non nuls, tels que :

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } [f, g] = \alpha f + \beta g$$

a) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

i. Montrer que : $2\alpha gf + \beta(1 + \alpha)g = \alpha(1 - \alpha)f$.

ii. En déduire : $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(g)$ puis : $gf = f$.

iii. En déduire : $\alpha + \beta = 0$, puis $\alpha = -1$, puis $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.

iv. Réciproquement, vérifier qu'un couple (f, g) de projecteurs de E tels que :

$$gf = f \text{ et } \text{Im}(g) \subset \text{Im}(f)$$

est solution de l'équation : $[f, g] = -f + g$.

b) On suppose dans cette question $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$.

i. Montrer successivement les résultats suivants : $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$, $fg = f$,
 $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 1$, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.

ii. Réciproquement, vérifier qu'un couple (f, g) de projecteurs de E tels que :

$$fg = f \text{ et } \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

est solution de l'équation : $[f, g] = f - g$.

c) Conclure de ce qui précède que, si f, g sont deux projecteurs vérifiant l'égalité $[f, g] = \alpha f + \beta g$ et dont le produit n'est pas commutatif, le couple (α, β) ne peut prendre que l'une des deux valeurs $(-1, 1)$ ou $(1, -1)$.

PARTIE D : Étude d'un système d'équations

Dans cette partie, f, g, h désignent trois endomorphismes non nuls de E tels que :

$$[f, g] = \alpha g, [f, h] = \beta h, [g, h] = f$$

où α et β sont deux complexes non nuls.

On rappelle que, d'après les résultats de la partie B, g et h sont nilpotents

1°) Calculer la valeur de $(\alpha + \beta)[g, h]$, et en déduire : $\alpha + \beta = 0$.

2°) Dans cette question, on suppose que le rang de g est égal à $n - 1$.

- a) Déterminer la somme des valeurs propres de f , et en déduire ces valeurs propres.
Quel est le rang de f ? (*penser à utiliser les résultats de B.2*)
- b) Déterminer la matrice C de h dans la base définie à la question B.2.f.
Quel est le rang de h ?
- c) Vérifier que les endomorphismes f, g, h déterminés par les matrices A, B, C satisfont bien aux conditions posées au début de cette partie D (*ainsi, le système d'équations proposé a des solutions*)
- d) Montrer que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces de E stables à la fois par f, g et h .

3°) Dans cette question, on suppose $\alpha = 2$, et que $\{0_E\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables à la fois par f, g et h ; on ne fait plus d'hypothèse sur le rang de g .

- a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité :

$$[g, h^k] = kh^{k-1}(f - (k-1)Id_E)$$

et en déduire que, si p est l'indice de nilpotence de h , $p - 1$ est valeur propre de f .

- b) Montrer que g est de rang $n - 1$ et que f est diagonalisable .
Indication : montrer qu'il existe un vecteur propre x de f tel que $h(x) = 0$, puis considérer le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $g^k(x)$.

D'après : X P' 1983, X M' 1985, ENSAIT 1992

Partie A

①. Si f est nilpotent : soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Il existe $x \in E, x \neq 0$ tq $f(x) = \lambda x$.

Alors : $f^n(x) = \lambda^n x$ et, puisque $f^n = 0$ et $x \neq 0$, on a $\lambda = 0$

• Réciproquement, si $\text{Sp}(f) = \{0\}$, alors le polynôme caractéristique

χ_f de f est nécessairement égal à $(-1)^n X^n$ (puisque'il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$)

D'après le th. de Cayley-Hamilton, on a alors $f^n = 0$ soit f nilpotent

(Rem : on pouvait aussi utiliser le polynôme minimal de f , dont on sait que les racines sont exactement les vp de f ; il existe donc p tq $\pi_f = X^p$ d'où $f^p = 0$)

②. $[fg, h] = fgh - hfg = fgh - fhg + fhg - hfg$
 $= f(gh - hg) + (fh - hf)g = f[g, h] + [f, h]g$

• On trouve de même : $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$

③ a. Démontrons, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $[f^k, g] = k f^{k-1} h$

- C'est évident pour $k=0$ ($[\text{Id}, g] = 0$) et pour $k=1$ (d'après les hypothèses)

- Si cela est vrai à l'ordre $k-1$, alors :

$$[f^k, g] = [f f^{k-1}, g] = [f, g] f^{k-1} + f [f^{k-1}, g]$$

CAR f et h commutent
 puisque $[f, h] = 0$!

$$= h f^{k-1} + (k-1) f \cdot f^{k-2} h = (k-1) f^{k-1} h : \text{cf. Id}$$

• On en déduit alors facilement, par linéarité (l'appl. $f \mapsto [f, g]$ étant bien linéaire) : $\forall P \in \mathbb{C}[X], [P(f), g] = P'(f) h$

④ On démontre l'égalité $P^{(k)}(f) h^{2^{k-1}} = 0$ par récurrence sur k :

- c'est évident pour $k=0$, car $h^0 = \text{Id}_E$ et $P^{(0)}(f) = P(f) = 0$

- Supposons l'égalité démontrée à l'ordre k . On calcule alors :

$$h^{2^{k-1}} [P^{(k)}(f) h^{2^{k-1}}, g] = h^{2^{k-1}} [P^{(k)}(f), g] h^{2^{k-1}} + h^{2^{k-1}} P^{(k)}(f) [h^{2^{k-1}}, g] \quad (\text{d'après } ②)$$

$$= h^{2^{k-1}} P^{(k+1)}(f) h \cdot h^{2^{k-1}} + h^{2^{k-1}} P^{(k)}(f) [h^{2^{k-1}}, g]$$

d'après la quest. précédente

On : h et f commutent, puisque $[f, h] = 0$. Il en résulte que

h^{2^k-1} et $P^{(k)}(f)$ commutent, donc d'après l'H.R. $h^{2^k-1} P^{(k)}(f) = P^{(k)}(f) h^{2^k-1} = 0$ (2)

Le calcul précédent donne alors:

$$h^{2^k-1} \left[\underbrace{P^{(k)}(f)}_{=0} h^{2^k-1}, g \right] = h^{2^{k+1}-1} P^{(k+1)}(f) = 0 : \text{c.q.f.d.}$$

(c) Soit P un polynôme annulateur non nul de f (il en existe, car $\dim E < +\infty$) et $h = d^2 P$. Alors $P^{(k)}(f)$ est une constante non nulle, et le calcul précédent donne : $h^{2^k-1} = 0$: h est nilpotent.

(4) (a) Soit $x \in N_k$: $f^k(x) = 0$.

En utilisant 3.a. appliqué au polynôme X^{k+1} , on a:

$$[f^{k+1}, g] = (k+1) f^k h$$

$$\text{d'où } f^{k+1} g(x) - g f^{k+1}(x) = (k+1) f^k h(x) = (k+1) h f^k(x) \quad (\text{car } f \text{ et } h \text{ commutent})$$

$$\text{or } f^k(x) = 0 \text{ d'où } f^{k+1}(x) = 0 \text{ d'où } f^k(fg)(x) = 0 \text{ soit } fg(x) \in N_k : \text{c.q.f.d.}$$

(b). f étant nilpotent, il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait :

$$\{0\} \subsetneq \text{Ker } f \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } f^{p-1} \subsetneq \text{Ker } f^p = E \quad (p \text{ est l'indice de nilpotence de } f)$$

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*, x \in \text{Ker } f^k\}$ est donc non vide : il possède bien un plus petit élément.

• On applique alors le résultat du 3.a au polynôme X^k :

$$f^k g - g f^k = k f^{k-1} h = k h f^{k-1}$$

$$\text{or, on a } f^k(x) = 0 \text{ et } fg(x) = \lambda x \text{ d'où}$$

$$f^{k-1}(fg)(x) - g f^k(x) = k h f^{k-1}(x)$$

$$\text{donne : } \lambda f^{k-1}(x) = k h f^{k-1}(x) : \text{c.q.f.d.}$$

(c) Si λ est une valeur propre de fg , et $x \neq 0$ un vecteur propre associé, la relation ci-dessus (appliquée avec k min. tel que $x \in N_k$) montre que

$$h [f^{k-1}(x)] = \frac{\lambda}{k} [f^{k-1}(x)], \text{ avec } f^{k-1}(x) \neq 0 \text{ (pu de } f \text{ de } k)$$

donc $\frac{\lambda}{k}$ est valeur propre de h .

Mais h nilpotent, donc $\lambda = 0$.

Ainsi, la seule valeur propre de fg est 0, donc fg est nilpotent

• On a alors : $(fg)^n = 0$ d'où $(gf)^{n-1} = g(fg)^n f = 0$ d'où gf est nilpotent.

d. On a supposé f non nul; de plus f est nilpotent, donc sa seule valeur propre est 0. Par suite il existe $x \neq 0$ tel que $\{x, f(x)\}$ soit libre.
 Soit alors H un supplémentaire de $\text{Vect}(\{x, f(x)\})$ dans E . On peut définir une appl. linéaire g_1 par:

$$g_1 \text{ nulle sur } H, \quad g_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_1[f(x)] = x.$$

Alors $g_1 f$ n'est pas nilpotent (puisque x est un $\vec{v}$ associé à la $vp \neq 1$)
 et $f g_1$ non plus (puisque $f(x)$ est un $\vec{v}$ associé à la $vp \neq 1$)

• Or, par l'absurde, $\psi_f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on aurait $\psi_f(g_1) = [f, g_1] = 0$

D'après les questions précédentes, on devrait avoir $f g_1$ nilpotent: contradiction

⑤ a) On procède par récurrence sur $k \geq 1$ pour obtenir l'égalité demandée

- pour $k=1$, celle-ci s'écrit: $\psi_f(g) = fg - gf$, ce qui est vrai.

- Supposons la vérifiée à l'ordre k . Alors, avec la convention $C_k^i = 0$

si $i > k$, on a: $(\psi_f)^k(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^i$

$$\text{d'où } (\psi_f)^{k+1}(g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i \psi_f(f^{k-i} g f^i)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k+1-i} g f^i - \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k-i} g f^{i+1}$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_k^i f^{k+1-i} g f^i + \sum_{j \in \mathbb{N}} (-1)^{j-1} C_k^{j-1} f^{k+1-j} g f^j$$

(en posant $j = i+1$ et $C_k^{-1} = 0$)

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i [C_k^i + C_k^{i-1}] f^{k+1-i} g f^i$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i C_{k+1}^i f^{k+1-i} g f^i \quad : \quad \underline{\text{c.q.f.d.}}$$

⑥ On a donc: $(\psi_f)^{2p-1}(g) = \sum_{i=0}^{2p-1} (-1)^i C_{2p-1}^i f^{2p-1-i} g f^i$

Or, pour $0 \leq i \leq p-1$, $2p-1-i \geq p$ donc $f^{2p-1-i} = 0$

et pour $p \leq i \leq 2p-1$, $f^i = 0$.

On a donc: $(\psi_f)^{2p-1}(g) = 0$ pour $\forall g \in \mathcal{L}(E)$ soit $(\psi_f)^{2p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Donc ψ_f est nilpotent (et son indice de nilpotence est inférieur à $2p-1$).

(4)

(C). Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$: $E = \text{Ker } u \oplus S$

On sait alors que la restriction u' de u à S est un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$: $u' : S \rightarrow \text{Im } u$ et $u'^{-1} : \text{Im } u \rightarrow S$
 $x \mapsto u(x)$

Soit F un supplémentaire de S : $E = F \oplus S$. On sait alors qu'on peut définir un endo. v de E par :
$$\begin{cases} v(y) = 0 & \text{si } y \in F \\ v(y) = u'^{-1}(y) & \text{si } y \in \text{Im } u. \end{cases}$$

On aura alors : $\forall x \in S \quad vu(x) = x$ car $u(x) = u'(x)$ dans ce cas.

$$\text{d'où } uvu(x) = u(x)$$

$$\text{et } \forall x \in \text{Ker } u \quad uvu(x) = u(x) = 0$$

On a donc bien : $uvu = u$

$$\bullet \text{ On a : } \forall g \in \mathcal{L}(E) \quad \psi_f^{2p-2}(g) = \sum_{i=0}^{2p-2} (-1)^i \binom{2p-2}{2p-2-i} f^{2p-2-i} g f^i$$

Or $f^i = 0$ si $i \geq p$, et $f^{2p-2-i} = 0$ si $2p-2-i \geq p$ soit $i \leq p-2$.

$$\text{Il reste donc : } \psi_f^{2p-2}(g) = (-1)^{p-1} \binom{p-1}{2p-2} f^{p-1} g f^{p-1}$$

Si on choisit alors g tel que $f^{p-1} g f^{p-1} = f^{p-1}$ (ce qui est possible d'après la question précédente), on aura : $f^{p-1} = \psi_f^{2p-2} \left(\frac{g}{(-1)^{p-1} \binom{p-1}{2p-2}} \right)$

$$\text{soit } f^{p-1} \in \text{Im } \psi_f^{2p-2}$$

$\bullet$ Or $f^{p-1} \neq 0$ par déf. de p , donc $\psi_f^{2p-2} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$; et on avait vu $\psi_f^{2p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Donc l'indice de nilpotence de ψ_f est : $2p-1$

PARTIE B :

1) (a) $\psi_f(g^k) = \alpha_k g^k$: se démontre par récurrence sur k (cf. ex. corrigé en classe)

(b) Soit $x \in \text{Ker } g^k$. Alors : $f g^k(x) - g^k f(x) = \alpha_k g^k(x)$ et $g^k(x) = 0$ donc : $g^k[f(x)] = 0$, soit $f(x) \in \text{Ker } g^k$: $\text{Ker } g^k$ est bien stable par f .

(c) Si on suppose $g^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^+$, alors g^k est un vecteur propre de ψ_f associé à la valeur propre α_k .

ψ_f posséderait donc une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible (car $\alpha \neq 0$!)

car φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim \mathcal{L}(E) < +\infty$.

⑤

l'hypothèse initiale est donc absurde et: $\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tq } g^k = 0$, soit: g nilpotent

② a. On a ici $\dim \text{Ker } g = 1$. Si p est l'indice de nilpotence de g , on a $p \leq n$ et: $\{0\} \subsetneq \text{Ker } g \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker } g^{p-1} \subsetneq \text{Ker } g^p = E$. (1)

• En considérant la restriction de g à $\text{Im } g^k$, et en lui appliquant le théorème du rang, on a: $\text{rg } g^{k+1} = \text{rg } g^k - \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } g^k)$

$$\text{soit } \dim \text{Ker } g^{k+1} = \dim \text{Ker } g^k + \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } g^k)$$

$$\text{d'où } \dim \text{Ker } g^{k+1} \leq \dim \text{Ker } g^k + 1. (2)$$

En comparant (1) et (2), il est clair que:

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim \text{Ker } g^k = k \text{ et } p = n$$

(Rem: cela a déjà été fait en classe!)

Ⓟ Puisque $\text{Ker } g^{n-1} \subsetneq E$, il existe $x \in E$ tel que $x \notin \text{Ker } g^{n-1}$.

Posons alors: $x_1 = g^{n-1}(x)$, $x_2 = g^{n-2}(x)$, ..., $x_n = x$.

Alors: Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la famille $(x_1, \dots, x_k)$ est linéaire car:

si $\lambda_1 g^{n-1}(x) + \dots + \lambda_k g^{n-k}(x) = 0$, alors, en appliquant g^{k-1} , puisque

$g^n = 0$, on obtient: $\lambda_k g^{n-1}(x) = 0$ d'où $\lambda_k = 0$ puisque $g^{n-1}(x) \neq 0$

et on recommence...

• Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_j \in \text{Ker } g^k$ car: $g^k(x_j) = g^k[g^{n-j}(x)] = g^{n+k-j}(x) = 0$

puisque $k-j+n \geq n$.

• Ainsi $\{x_1, \dots, x_k\}$ est une famille linéaire de $\text{Ker } g^k$, de cardinal k et $\dim \text{Ker } g^k = k$: c'en est donc une base.

Ⓢ On a: $fg - gf = \kappa g$ d'où $f g(x_1) - g f(x_1) = \kappa g(x_1)$

Or $x_1 \in \text{Ker } g$ d'où $g[f(x_1)] = 0$. Donc $f(x_1) \in \text{Ker } g$, et, puisque

x_1 est un vecteur de base de $\text{Ker } g$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $f(x_1) = \lambda x_1$

• On a vu (1.b) que $\text{Ker } g^k$ était stable par f pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a donc: $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_k\})$ stable par f , ce qui montre (cf. cours) que la matrice de f ds $\{x_1, \dots, x_n\}$ est bien triangulaire supérieure.

d). λ_i est donc la coordonnée de $f(x_i)$ sur x_i . On a donc :

(6)

$$f(x_i) = \lambda_i x_i + y_i \quad \text{avec} \quad y_i \in \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_{i-1}\}) = \text{Ker } g^{i-1}$$

Or $fg - gf = \alpha g$ d'a :

$$fg(x_i) - g f(x_i) = \alpha g(x_i) \quad ; \quad \text{or } g(x_i) = x_{i-1}$$

$$\text{soit } f(x_{i-1}) - g(\lambda_i x_i + y_i) = \alpha x_{i-1}$$

$$\text{soit } \lambda_{i-1} x_{i-1} + g(y_{i-1}) - \lambda_i x_{i-1} - g(y_i) = \alpha x_{i-1}$$

$$\text{soit } (\lambda_{i-1} - \lambda_i - \alpha) x_{i-1} = g(y_i) - y_{i-1}$$

Or $g(y_i) - y_{i-1} \in \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_{i-2}\})$ d'a : $\lambda_i = \lambda_{i-1} - \alpha$

- On en déduit facilement : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \lambda - (i-1)\alpha$
- La matrice de f étant triangulaire supérieure, les λ_i sont donc les valeurs propres de f ; étant toutes distinctes (car $\alpha \neq 0$), f est diagonalisable.

e) Soit $x \neq 0$ tq $f(x) = \mu x$ avec $\mu \neq \lambda$.

$$\text{Alors } fg(x) - g f(x) = \alpha g(x) \text{ donne } f[g(x)] = (\mu + \alpha) g(x)$$

Or, on ne peut avoir $g(x) = 0$, car sinon x serait colinéaire à x_1 et $\mu = \lambda$!
 $g(x)$ est donc bien un vecteur propre de f , associé à la vp $\mu + \alpha$.

f) • Si on avait $g^{n-1}(e_n) = 0$, alors $e_n \in \text{Ker } g^{n-1} = \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_{n-1}\})$

Si on note f' l'endo. induit par f sur $\text{Ker } g^{n-1}$, on aurait donc : $f'(e_n) = \lambda_n e_n$
Mais f' est diagonalisable (cf. cours), et ses valeurs propres sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$: il y a donc contradiction.

- $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de E se démontre alors comme dans 2.b.

- et, en reprenant les résultats du 2.b (en remplaçant x_k par e_k), on

obtient que $A = M(f) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

- De plus, on a :
$$\begin{cases} g(e_1) = g^n(e_n) = 0 \\ g(e_k) = e_{k-1} \text{ si } k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \end{cases}$$

$$\text{donc } B = M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE C :

① a. le cas $\alpha=0$ et $\beta=0$ donne $h=0$: h est donc nilpotent

⑦

• Si $\beta=0$ et $\alpha \neq 0$, alors on a $[g, f] = -\alpha f$, donc f est nilpotent d'après la partie précédente, et $h = \alpha f$ est aussi nilpotent.

• Si $\beta \neq 0$, soit $g_1 = g + \frac{\alpha}{\beta} f$. Alors $[f, g_1] = [f, g] + \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{[f, f]}_{=0}$
$$= \alpha f + \beta g = \alpha g_1$$

et $h = [f, g] = [f, g_1]$.

On est donc ramené au cas précédent, et h est nilpotent.

② 1^{er} cas : $\alpha = \beta = 0$, c'est à dire f et g commutent.

Puisque $K = \mathbb{C}$, f possède au moins une valeur propre λ ;
 $gf = fg$, donc g laisse stable le sous-espace propre $E_\lambda(f)$;
l'endo. de $E_\lambda(f)$ induit par g possède alors aussi une valeur propre μ , (car $K = \mathbb{C}$)
c'est-à-dire : $\exists x \neq 0, x \in E_\lambda(f)$ tq $g(x) = \mu x$.

x est donc bien un vecteur propre commun à f et g .

2^e cas : $\alpha \neq 0, \beta = 0$.

Alors $[f, g] = \alpha f$ et, puisque $\alpha \neq 0$, f est nilpotent. Donc $\text{Ker } f$ est de dimension ≥ 1 .

De plus : $x \in \text{Ker } f \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow fg(x) - \alpha gf(x) = 0 \Rightarrow f[g(x)] = 0$
d'où $\text{Ker } f$ est stable par g .

l'endo. induit par g sur $\text{Ker } f$ possède alors un vecteur propre, qui est aussi un vecteur propre de f pour la valeur propre 0, d'où le résultat.

3^e cas : $\beta \neq 0$.

On sait que $h = [f, g] = \alpha f + \beta g$, d'où $[f, h] = \alpha \underbrace{[f, f]}_{=0} + \beta [f, g]$
$$= \beta [f, g] = \beta h.$$

On a donc : $[f, h] = \beta h$ et on est ramené au cas précédent : il existe un vecteur propre commun à f et h , c'est-à-dire $x \neq 0$ tel que : $f(x) = \lambda x$ et $h(x) = \mu x$.

On a alors $\alpha f(x) + \beta g(x) = \mu x$ soit $g(x) = \frac{1}{\beta}(\mu - \alpha \lambda) x$, et x est aussi un vecteur propre de g : q.f.d.

② ① (i) Par hypothèse, $fg - gf = \alpha f + \beta g$ avec $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. En "composant" par g à gauche, compte tenu de $g^2 = g$, on trouve :

on obtient: $gf - fg = \alpha gf + \beta g$, d'où $(gf)g = (\alpha + 1)gf + \beta g$.

D'où: $(fg - \alpha f - \beta g)g = (\alpha + 1)gf + \beta g$

" $(1 - \alpha)fg = (\alpha + 1)gf + 2\beta g$

" $(1 - \alpha)(gf + \alpha f + \beta g) = (\alpha + 1)gf + 2\beta g$

soit enfin: $2\alpha gf + \beta(1 + \alpha)g = (1 - \alpha)\alpha f$.

(ii). Si $y \in \text{Im } f$: $f(y) = y$ (car f projecteur) d'où $y = \frac{2\alpha gf + \beta(1 + \alpha)g}{(1 - \alpha)\alpha}(y)$

soit $y = \frac{2\alpha + \beta(1 + \alpha)}{\alpha(1 - \alpha)}g(y)$, et $y \in \text{Im } g$. Donc $\text{Im } f \subset \text{Im } g$

• On a alors: $\forall x \in \text{Ker } f, gf(x) = f(x) = 0$

$\forall x \in \text{Im } f, gf(x) = g(x) = x = f(x)$ (car $x \in \text{Im } f$ et $\bar{\alpha} \text{Im } g$)

donc gf et f coïncident sur $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$, supplémentaires. D'où $gf = f$

(iv). On a: $fg = gf + \alpha f + \beta g = (\alpha + 1)f + \beta g$ et, en multipliant par f à droite:

$f gf = (\alpha + 1)f^2 + \beta gf$ d'où $f = (\alpha + 1 + \beta)f$ car $gf = f$

d'où $\alpha + \beta = 0$ (f non nul)

• On a $2\alpha gf + \beta(1 + \alpha)g = \alpha(1 - \alpha)f$ d'où $2\alpha f + \beta(1 + \alpha)g = \alpha(1 - \alpha)f$

d'où, puisque $\beta = -\alpha$: $-\alpha(1 + \alpha)g = -\alpha(1 + \alpha)f$.

Puisque $\alpha \neq 0$ et $f \neq g$, on en tire $\alpha = -1$

• On a donc: $fg - gf = -f + g$ et $gf = f$, d'où $fg = g$.

On en déduit $\text{Im } g \subset \text{Im } f$ et, par suite $\text{Im } f = \text{Im } g$.

(v) Soient f, g des projecteurs tels que $gf = f$ et $\text{Im } g \subset \text{Im } f$. Alors:

$\forall x \in \text{Ker } g, fg(x) = g(x) = 0$

$\forall x \in \text{Im } g, fg(x) = f(x) = x = g(x)$

donc fg et g coïncident sur $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$, supplémentaires.

Par suite: $fg = g$ d'où $[f, g] = -f + g$.

(b) (i) De l'égalité: $2\alpha gf + \beta(1 + \alpha)g = \alpha(1 - \alpha)f$, on tire, puisque $gf = fg - \alpha f - \beta g$
 $2\alpha fg + \beta(1 - \alpha)g = \alpha(\alpha + 1)f$

On a alors:

• si $x \in \text{Ker } g, g(x) = 0$ d'où $\alpha(\alpha + 1)f(x) = 0$ d'où $f(x) = 0$: $\text{Ker } g \subset \text{Ker } f$

- Si $x \in \text{Ker } g$, $fg(x) = f(x) = 0$) d'où $fg = f$
 Si $x \in \text{Im } g$, $fg(x) = f(x)$
- En multipliant l'égalité $gf = fg - \alpha f - \beta g$ par f à gauche, on a:
 $fgf = f'g - \alpha f' - \beta fg$ d'où, compte tenu de $fg = f$ et $f' = f$
 $(\alpha + \beta)f = 0$ d'où $\alpha + \beta = 0$
- L'égalité $2\alpha fg + \beta(1-\alpha)g = \alpha(\alpha+1)f$ donne $2\alpha f + \beta(1-\alpha)g = \alpha(\alpha+1)f$
 d'où, puisque $\beta = -\alpha$, $\alpha(1-\alpha)f = \alpha(1-\alpha)g$.
 Or $f \neq g$ et $\alpha \neq 0$, d'où $\alpha = 1$
- On a donc $fg - gf = f - g$, d'où $gf = g$ et on en tire facilement $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$,
 d'où finalement $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.

③ Compte tenu de ce qui précède, il suffit de montrer que le cas $\alpha = 0$ est impossible.

Si on avait $\alpha = 0$, soit $fg - gf = \beta g$, on aurait, en multipliant à gauche, puis à droite par g :

$$\begin{cases} gfg - gf = \beta g \\ fg - gfg = \beta g \end{cases} \quad \text{d'où } fg = gf \quad (\text{et } \beta = 0)$$

ce qui est exclu.

PARTIE D

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad (\alpha + \beta)[g, h] &= \alpha[g, h] + \beta[g, h] = [\alpha g, h] + [g, \beta h] \\ &= [[fg, h] + [g, fh]] \\ &= (fg - gf)h - h(fg - gf) + g(fh - hf) - (fh - hf)g \\ &= fgh + hg f - ghf - fhg = f(gh - hg) + (hg - gh)f \\ &= 0 \text{ car } gh - hg = f. \end{aligned}$$

• On a donc $(\alpha + \beta)f = 0$ et f non nul, d'où $\alpha + \beta = 0$

② a). On a: $f = gh - hg$ d'où $\text{tr}(f) = \text{tr}(gh) - \text{tr}(hg) = 0$.

La somme des valeurs propres de f est donc nulle.

• Or, en reprenant les résultats et notations de B.2, les valeurs propres de f sont les $\lambda - (i-1)\alpha$ pour $1 \leq i \leq n$. On a donc:

$$\sum_{i=1}^n \lambda - (i-1)\alpha = 0 \text{ soit } n\lambda - \frac{n(n-1)}{2}\alpha = 0 \text{ d'où } \lambda = \frac{(n-1)\alpha}{2}.$$

Les valeurs propres de f sont donc les: $\frac{\alpha}{2}(n-1-2(i-1))$ pour $1 \leq i \leq n$.

• Ces valeurs propres sont toutes distinctes, donc le rang de f vaut n si 0 n'est pas valeur propre, et $n-1$ sinon.

Or, pour qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tq $n-1-2(i-1)=0$, il faut et il suffit que n soit impair.

En conclusion: n pair $\Rightarrow \text{rg}(f)=n$ et n impair $\Rightarrow \text{rg}(f)=n-1$.

Ⓟ Rappelons que la base $(e_1, \dots, e_n)$ vue en B.2. est telle que:

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket & f(e_k) = (\lambda - (k-1)\alpha) e_k \quad (\text{avec, ici, } \lambda = \alpha \frac{n-1}{2}) \\ g(e_1) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, & g(e_k) = e_{k-1}. \end{cases}$$

On cherche alors les images des e_k par h :

$\rightarrow [g, h] = f$ donc $g(h(e_1)) - \underbrace{h(g(e_1))}_{=0} = f(e_1)$ soit $g(h(e_1)) = \lambda e_1$ (1)

On a aussi $[f, h] = \beta h = -\alpha h$ d'où $f(h(e_1)) - \underbrace{h(f(e_1))}_{=\lambda e_1} = -\alpha h(e_1)$

d'où $f(h(e_1)) = (\lambda - \alpha) h(e_1)$ (2)

$h(e_1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2 = \lambda - \alpha$ d'où: $h(e_1)$ colinéaire à e_2 .

On a donc $h(e_1) = \mu_1 e_2$ et d'après (1): $g(\mu_1 e_2) = \lambda e_1 \Rightarrow \mu_1 = \lambda$.

donc: $h(e_1) = \lambda e_2$

$\rightarrow$ Montrons alors par récurrence qu'il existe μ_k tel que $h(e_k) = \mu_k e_{k+1}$
- cela est vrai pour $k=1$ d'après ce qui précède (et $\mu_1 = \lambda$) ($1 \leq k \leq n-1$)
- si c'est vrai à l'ordre $k-1$, alors:

$[g, h] = f$ donne: $g(h(e_k)) - \underbrace{h(g(e_k))}_{=e_{k-1}} = f(e_k) = \lambda_k e_k$

soit $g(h(e_k)) = (\lambda_k + \mu_{k-1}) e_k$

$[f, h] = -\alpha h$ donne alors $f(h(e_k)) = (\lambda_k - \alpha) h(e_k)$

On a donc, pour les mêmes raisons qu'auparavant, $h(e_k)$ colinéaire à e_{k+1}

soit $h(e_k) = \mu_k e_{k+1}$

La relation $g(h(e_k)) = (\lambda_k + \mu_{k-1}) e_k$ donne alors: $\mu_k = \mu_{k-1} + \lambda_k$

On trouve alors: $\mu_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha$

$\rightarrow$ Il reste (!) à calculer $h(e_n)$. Le même calcul qu'auparavant

donne: $f(h(e_n)) = (\lambda_n - \alpha) h(e_n)$.

Mais $\lambda_n - \alpha$ n'est plus une valeur propre de f , d'où $h(e_n) = 0$

(11)

Final^t, la matrice de h ds la base $(e_1, \dots, e_n)$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ p_2 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } p_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha \text{ (et } \lambda = \alpha \frac{(n-1)}{2} \text{)}$$

③ Il s'agit ici d'étudier la réciproque : soient f, g, h trois endomorphismes tq, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on ait :

$$\begin{cases} - \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \lambda_k e_k \text{ avec } \lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha \\ - g(e_1) = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, g(e_k) = e_{k-1} \\ - \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, h(e_k) = p_k e_{k+1} \text{ avec } p_k = k\lambda - \frac{k(k-1)}{2}\alpha \text{ et } h(e_n) = 0 \end{cases} \text{ et } \lambda = \alpha \frac{(n-1)}{2}$$

alors, il s'agit de vérifier que $[f, g] = \alpha g$, $[f, h] = -\alpha h$, $[g, h] = f$ ce qui se fait, à l'aide de torrides et passionnants calculs, en calculant les images des vecteurs de base par ces endomorphismes

④ Soit $F \neq \{0\}$ un s-ev de E stable par f, g et h .

f étant diagonalisable, on sait (th. du cours) qu'il existe une base de F faite de vecteurs propres de f .

Mais si $e_k \in F$ avec $2 \leq k \leq n-1$, puisque F est stable par g , $e_{k-1} \in F$ et puisque F est stable par h , $p_k e_{k+1} \in F$ d'où $e_{k+1} \in F$ (vérifiez que $p_k \neq 0$ pour $\forall k$!)

$$\text{Donc } e_k \in F \Rightarrow \{e_{k-1}, e_k, e_{k+1}\} \subset F.$$

Finalement, on obtiendra $\{e_1, \dots, e_n\} \subset F$, d'où $F = E$.

$$\text{Donc } F \text{ stable par } f, g, h \Rightarrow F = \{0_E\} \text{ ou } F = E$$

③ a. On procède par récurrence sur k :

- pour $k=1$, l'égalité s'écrit : $[g, h] = f$, ce qui est vrai.

- supp. l'égalité démontrée au rang k , alors :

$$\begin{aligned} [g, h^{k+1}] &= [g, h^k h] = [g, h^k] h + h^k [g, h] \\ &= h h^{k-1} (f - (k-1)I) h + h^k f \end{aligned}$$

soit: $[g, h^{k+1}] = k h^{k-1} f h - k(k-1) h^k + h^k f$

or $f h - h f = -2h$ d'où $[g, h^{k+1}] = k h^{k-1} (h f - 2h) - k(k-1) h^k + h^k f$
 $= (k+1) h^k f - k(k+1) h^k$
 $= (k+1) h^k (f - k \text{Id}_E) : \text{cf. 1d}$

• Soit p l'indice de nilpotence de h . Alors $h^p = 0$ et $h^{p-1} \neq 0$, d'où la formule précédente donne, pour $k = p$:

$$h^{p-1} (f - (p-1)I) = 0$$

On en déduit $f - (p-1)I$ non injective (sinon elle serait bijective et $h^{p-1} = 0$)

soit: $p-1$ valeur propre de f .

②. Soit λ une valeur propre de f , et $x \neq 0$ un $\vec{v}_p$ associé.

On a: $f(x) = \lambda x$ et $f h - h f = -2h$ d'où $f h(x) - h(\lambda x) = -2h(x)$
d'où $f[h(x)] = (\lambda - 2)h(x)$

On a choisit pour λ la plus petite valeur propre réelle de f (il en existe au moins une: c'est $p-1$!), alors $\lambda - 2$ n'est plus valeur propre de f et alors $h(x) = 0$

• Soit alors $F = \text{Vect}(\{g^k(x), k \in \mathbb{N}\})$

- il est clair que F est stable par g !

- F est stable par f car: $f g^k - g^k f = 2k g^k$ (cf. B.1.a)

d'où $f[g^k(x)] = g^k[f(x)] + 2k g^k(x) = (\lambda + 2k) g^k(x)$ (car $f(x) = \lambda x$)
 $\in F$.

- Enfin, F est stable par h :

si $k \in \mathbb{N}^*$, $[h, g^k] = [h, g^{k-1}g] = [h, g^{k-1}]g + g^{k-1}[h, g]$
 $= [h, g^{k-1}]g + g^{k-1}f$.

et il est facile d'en déduire par récurrence: $\forall y \in F, [h, g^k](y) \in F$

En particulier: $\forall k \in \mathbb{N}, [h, g^k](x) \in F$. Or $[h, g^k](x) = h[g^k(x)]$ car $h(x) = 0$ donc $h[g^k(x)] \in F$ pour tout k , et F est stable par h .

• Comme $F \neq \{0\}$ (car $x \in F$), on en déduit: $F = E$

Donc $\{x, g(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est libre (car sinon, il existerait p tel que $F = \text{Vect}(\{x, g(x), \dots, g^p(x)\})$ avec $p \leq n-2$...). D'où g est de rang $n-1$ et, en appliquant les résultats de la partie B, f est diagonalisable.