

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Crochet de Lie

Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} . Si $a, b \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme $a \circ b$ sera noté ab et l'on pose $[a, b] = ab - ba$.

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, on note θ_a l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\theta_a(b) = [a, b] = ab - ba$.

On admettra le *théorème de décomposition des noyaux* (cf. problème n°2) :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres distinctes et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ leur multiplicité respective ; alors $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id})^{\alpha_i}$.

L'objet du problème est d'étudier dans quelques cas particuliers des propriétés du « crochet » $[,]$.

I - EXEMPLE.

1. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n , à coefficients dans \mathbb{C} , et l'on pose pour $P \in E$

$$e(P) = P' \quad , \quad f(P) = -nXP + X^2P' \quad , \quad h(P) = -nP + 2XP'.$$

a) Calculer $[e, h]$, $[f, h]$, $[e, f]$.

b) Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par e et f , et soit $P \neq 0$ un élément de F . En examinant les degrés des images successives de P par e et par f , prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un \mathbb{C} -espace vectoriel quelconque de dimension finie. On considère 3 éléments de $\mathcal{L}(E)$ notés e, f, h et vérifiant :

$$[e, h] = 2e \quad , \quad [f, h] = -2f \quad , \quad [e, f] = h \quad , \quad (e, f, h) \neq (0, 0, 0).$$

On note \mathcal{L}_3 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ qu'ils engendrent.

2. Prouver que $\dim \mathcal{L}_3 = 3$.

3. Soit \mathcal{I} un sous-espace vectoriel de \mathcal{L}_3 tel que

$$\forall g \in \mathcal{I}, \forall a \in \mathcal{L}_3, [a, g] \in \mathcal{I}.$$

a) Montrer que si \mathcal{I} contient un élément $g = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$.

b) Prouver que si $\mathcal{I} \neq \{0\}$ alors $\mathcal{I} = \mathcal{L}_3$ (on pourra se ramener à la question précédente).

4. a) Soit y un vecteur propre de h ; prouver que si $e(y) \neq 0$, alors $e(y)$ est un vecteur propre de h .

b) En déduire qu'il existe un vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$.

Dans la suite de cette partie, on note x un tel vecteur, et on note α la valeur propre de h associée.

5. a) Calculer $h(f^k(x))$ où k est un entier naturel.

b) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.

c) Prouver que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par \mathcal{L}_3 autre que $\{0\}$ et E . On pose

$$F = \text{Vect}(x, f(x), \dots, f^m(x))$$

a) Justifier que F est stable par e, f et h . Que peut-on en déduire ?

b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$ est une base de E .

c) Déterminer la matrice de h dans la base \mathcal{B} .

d) En examinant $\text{tr } h$, prouver que $\alpha = -m$.

7. Déterminer la matrice de e dans la base \mathcal{B} .

II - PRÉLIMINAIRE À L'ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie E désigne toujours un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Prouver qu'un endomorphisme a de E possède une seule valeur propre si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $a - \lambda Id$ soit nilpotent.
2. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents commutant entre eux. Prouver que $u - v$ est nilpotent.
3. Soit u un endomorphisme de E ; on pose $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p$ et $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p$.
 - a) Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_u = \text{Ker } u^{p_0}$ et $\mathcal{G}_u = \text{Im } u^{p_0}$.
 - b) Prouver que \mathcal{N}_u et \mathcal{G}_u sont deux sous-espaces supplémentaires, stables par u , tels que u restreint à \mathcal{N}_u soit nilpotent et que u restreint à \mathcal{G}_u soit bijectif.
 - c) Prouver réciproquement que si $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u tels que la restriction de u à F soit nilpotente et la restriction de u à G bijective, alors $F = \mathcal{N}_u$ et $G = \mathcal{G}_u$.

On vient donc de prouver l'existence et l'unicité de tels sous-espaces F et G .

III - ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et l'on note θ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\theta_A(B) = AB - BA$.

1. a) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\phi_A(M) = AM$ sont les valeurs propres de A .

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\psi(M) = MA$.

Étant donnée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considère λ et μ deux valeurs propres de A de multiplicité respective α et β . On pose

$$\mathcal{L}_{\lambda, \mu} = \text{Vect} \left\{ U^t V, U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha; V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta \right\}.$$

2. a) Prouver que le sous-espace $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est stable par θ_A .

b) Prouver que la restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on remarquera que $\theta_A = \phi_A - \psi_A$, et on utilisera les résultats des questions II.1 et II.2).
3. a) Soit $\mathcal{F} = (U_1, \dots, U_p)$ et $\mathcal{G} = (V_1, \dots, V_q)$ deux familles de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prouver que si les familles \mathcal{F} et \mathcal{G} sont libres, la famille $\{U_i^t V_j, i \in [1, p], j \in [1, q]\}$, qu'on notera $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, est libre.

b) On note \mathcal{B}_λ une base de $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et \mathcal{B}_μ^* une base de $\text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$. Prouver que la famille $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ est une base de $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$.

c) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\lambda, \mu) \in (\text{Sp}A)^2} \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ où $\text{Sp}A$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A .

4. Déterminer \mathcal{N}_{θ_A} (on utilisera la question II.3°c).

5. a) Soit p_1, \dots, p_n des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^n p_k = n$. Prouver que $\sum_{k=1}^n p_k^2$ est minimal lorsque $\forall k \in [1, n], p_k = 1$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$ soit minimale.

* * * *
* * *
* *
*

CORRIGÉ : CROCHET DE LIE – ENSAI 2002

I - EXEMPLE.

1. a) Par un calcul simple, on obtient : $[e, h](P) = e(h(P)) - h(e(P)) = 2P' = 2e(P)$ donc $[e, h] = 2e$
De même, $[f, h] = -2f$ et $[e, f] = h$
- b) Si P est un polynôme de degré r , alors, la famille $(e^r(P), \dots, e^2(P), e(P), P, f(P), f^2(P), \dots, f^{n-r}(P))$ est une famille de $n+1$ polynômes échelonnée en degrés. Comme F est un sous espace stable par e et f , c'est une famille d'éléments de F .
On a donc une famille libre de $n+1$ éléments de F , sous espace vectoriel de E espace de dimension $n+1$. Donc $E = F$.
2. On suppose ici pour que $(e, f, h) \neq (0, 0, 0)$. On a alors, $e \neq 0$, $f \neq 0$ et $h \neq 0$ d'après les relations vérifiées par e , f , et h .
On remarque que le "crochet" est bilinéaire et que $\forall u \in \mathcal{L}(E) \quad [u, u] = 0$.
Considérons une combinaison linéaire nulle de e , f et h : $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$.
 $0 = [e, [\alpha e + \beta f + \gamma h]] = [e, \beta h + 2\gamma e] = 2\beta e$, donc $\beta = 0$.
 $0 = [e, \alpha e + \gamma h] = 2\gamma e$, donc $\gamma = 0$ puis $\alpha = 0$.
On en déduit que (e, f, h) est libre et que $\dim \mathcal{L}_3 = 3$.
3. a) $x = \alpha e + \beta f + \gamma h \in \mathcal{J}$, donc $[e, [f, x]] = -2\gamma h \in \mathcal{J}$ donc $h \in \mathcal{J}$ car $\gamma \neq 0$.
De même, $[f, x] = -\alpha h - 2\gamma f \in \mathcal{J}$ donc $f \in \mathcal{J}$ et $[e, x] = \beta h + 2\gamma e \in \mathcal{J}$ donc $e \in \mathcal{J}$.
 \mathcal{J} est un sous-espace de \mathcal{L} qui contient les trois vecteurs e , f et h d'une base de \mathcal{L} donc $\mathcal{J} = \mathcal{L}$.
- b) Si $\mathcal{J} \neq \{0\}$, alors, il contient un vecteur $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$.
Si $\gamma \neq 0$, alors on a montré que $\mathcal{J} = \mathcal{L}$.
On procède de même si $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.
4. a) Soit y un vecteur propre de h associé à une valeur propre α : $h(y) = \alpha y$.
De $eh - he = 2e$, on déduit $e(h(y)) - h(e(y)) = 2e(y)$ puis $h(e(y)) = (\alpha - 2)e(y)$.
Si $e(y) \neq 0$, $e(y)$ est donc un vecteur propre de h associé à la valeur propre $\alpha - 2$
- b) h est un endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel, h possède donc au moins un vecteur propre y associé à une valeur propre α .
S'il n'existait aucun vecteur propre x de h tel que $e(x) = 0$, alors, d'après la question précédente, si y est un vecteur propre de h , $e(y)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 2$, $e(e(y))$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha - 4$ etc...
On obtient ainsi une infinité de valeurs propres $\alpha, \alpha - 2, \alpha - 4$ etc. ce qui est impossible car l'espace vectoriel E est de dimension finie.
5. a) Montrons par récurrence que $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$.
C'est vrai pour $k = 0$.
Supposons le résultat vrai à un rang k et utilisons la relation $fh - hf = -2f$.
 $f(h(f^k(x))) - h(f(f^k(x))) = -2f(f^k(x))$
 $(\alpha - 2k)f^{k+1}(x) - h(f^{k+1}(x)) = -2f^{k+1}(x)$
On en déduit $h(f^{k+1}(x)) = (\alpha + 2(k+1))f^{k+1}(x)$ et on peut conclure d'après le principe de récurrence.
 $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$
- b) $f^0(x) = x \neq 0$.
Si pour tout entier naturel m , $f^m(x) \neq 0$, alors on déduit du a) l'existence d'une infinité de valeurs propres pour h , endomorphisme d'un espace de dimension finie.
C'est impossible, il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tels que $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$.
- c) Montrons par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$ (cela servira dans la question 7)).
Pour $k = 1$, de $[e, f] = h$, on déduit $e(f(x)) - f(e(x)) = h(x)$, or $e(x) = 0$ et $h(x) = \alpha x$ donc $e(f(x)) = \alpha x$.
L'hypothèse de récurrence au rang 1 est vraie.
Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à un rang $k \in \mathbb{N}^*$: $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$
En appliquant la relation $ef - fe = h$ au vecteur $f^k(x)$, on obtient :
 $e(f^{k+1}(x)) = (k(\alpha + k - 1) + \alpha + 2k)f^k(x) = (k+1)(\alpha + k)f^k(x)$, hypothèse de récurrence au rang $k+1$
On peut conclure d'après le principe de récurrence que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$
On en déduit que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. a) $F = \text{Vect}\{x, f(x), \dots, f^m(x)\}$, on utilise les résultats de la question 5)
 $f^{m+1}(x) = 0$ donc F est stable par f .
 $\forall k \in \mathbb{N}$, $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x) \in F$, on en déduit que F est stable par h .
 $e(x) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x) \in F$, on en déduit que F est stable par e .
 F est donc stable par e , f et h .
On sait que $F \neq \{0\}$ car $x \neq 0$, or E ne contient aucun sous-espace stable par \mathcal{L}_3 autre que $\{0\}$ et E . On a donc
 $F = E$.
- b) En a), on a montré que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$ est une famille génératrice de E .
Considérons une combinaison linéaire nulle des vecteurs de \mathcal{B} : $a_0x + a_1f(x) + \dots + a_mf^m(x) = 0$.
 $f^m(x) \neq 0$ et $f^{m+1}(x) = 0$, donc si on applique f^m à l'expression précédente, il reste : $a_0f^m(x) = 0$. On en déduit que $a_0 = 0$.
On recommence en appliquant f^{m-1} puis f^{m-2} etc. et on en déduit $a_1 = 0$ puis $a_2 = 0$ etc.
La famille \mathcal{B} est donc libre.
Finalement : $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$ est une base de E .
- c) On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}$, $h(f^k(x)) = (\alpha + 2k)f^k(x)$, la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^m(x))$ est donc la matrice diagonale d'ordre $m + 1$ dont les éléments diagonaux sont : $\alpha, \alpha + 2, \dots, \alpha + 2m$.
- d) De c), on déduit : $\text{tr } h = (m + 1)\alpha + 2 \sum_{k=0}^m k = (m + 1)\alpha + m(m + 1) = (m + 1)(\alpha + m)$
De $[e, f] = h$, on déduit : $\text{tr } h = \text{tr}(ef - fe) = \text{tr}(ef) - \text{tr}(fe) = 0$
On a donc $\alpha = -m$.
7. On a montré que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $e(f^k(x)) = k(\alpha + k - 1)f^{k-1}(x)$, de plus $e(x) = 0$, on en déduit que la matrice de e dans la base \mathcal{B} est $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ 1 \leq j \leq m+1}}$ avec $a_{ij} = (i + 1)(\alpha + i)$ si $j = i + 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon.

II - PRÉLIMINAIRE À L'ÉTUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Notons $n = \dim E$.
Si $a \in \mathcal{L}(E)$ possède une unique valeur propre λ , alors son polynôme caractéristique est $(\lambda - X)^n$.
Du théorème de Cayley-Hamilton, on déduit alors que $(\lambda \text{Id} - a)^n = 0$. $(a - \lambda \text{Id})$ est donc nilpotent.
Réciproquement, si il existe λ tel que $(a - \lambda \text{Id})$ est nilpotent, alors a possède un polynôme annulateur de la forme $(X - \lambda)^m$. Les valeurs propres de a étant incluses dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur, la seule valeur propre possible de a est λ . Et λ est effectivement valeur propre puisque $a - \lambda \text{Id}$ n'est pas injectif.
2. Supposons u nilpotent d'ordre p et v nilpotent d'ordre q .
Comme u et v commutent, on peut utiliser le binôme de Newton : $(u - v)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} u^k v^{p+q-k}$.
 $u^p = 0$ donc tous les termes d'indice $k \geq p$ sont nuls.
 $v^q = 0$ donc tous les termes d'indice $k \leq p$ sont nuls.
On a donc $(u - v)^{p+q} = 0$. $u - v$ est bien nilpotent.
3. a) $(\text{Ker } u^n) = \left(\bigcup_{p=0}^n \text{Ker } u^p\right)$ est une suite croissante de sous-espaces de E , E est de dimension finie, cette suite est donc stationnaire, constante à partir d'un certain rang p_0 . On a donc $\mathcal{N}_u \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p_0}$.
De même, $(\text{Im } u^n) = \left(\bigcap_{p=0}^n \text{Im } u^p\right)$ est une suite décroissante de sous-espace de E , constante à partir du même rang p_0 car $\dim \text{Ker } u^n + \dim \text{Im } u^n = \dim E$. On a donc $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p = \text{Im } u^{p_0}$.
- b) Soit $x \in \mathcal{N}_u \cap \mathcal{G}_u$. $u^{p_0}(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p_0}(y)$.
On a alors $u^{2p_0}(y) = 0$, donc $y \in \text{Ker } u^{2p_0}$. Comme $\text{Ker } u^{2p_0} = \text{Ker } u^{p_0}$, on a $u^{p_0}(y) = 0$ et donc $x = 0$ d'où $\mathcal{N}_u \cap \mathcal{G}_u = \{0\}$.
De plus $\dim \mathcal{N}_u + \dim \mathcal{G}_u = \dim \text{Ker } u^{p_0} + \dim \text{Im } u^{p_0} = \dim E$.
On en déduit que $\mathcal{N}_u \oplus \mathcal{G}_u = E$.

u commute avec u^{p_0} donc $\text{Ker } u^{p_0}$ et $\text{Im } u^{p_0}$ sont stables par u : \mathcal{N}_u et \mathcal{G}_u sont stables par u .

La restriction de u à \mathcal{N}_u est nilpotente d'indice p_0 .

La restriction de u à \mathcal{G}_u est bijective car son noyau est réduit à $\{0\}$ et que l'on est en dimension finie.

c) Soit n tel que la restriction de u à F soit nilpotente d'indice n .

Soit $x \in E$. On le décompose suivant la somme directe $F \oplus G = E : x = x_F + x_G$. ($u^n(x_F) = 0$ et $u(x_G) \in G$)

$\forall k \geq n, u^k(x) = u^k(x_G) \in G$, donc $\forall k \geq n, \text{Im } u^k \subset G$.

D'autre part, la restriction de u à G est bijective donc $\forall k \in \mathbb{N}, G = \text{Im } u^k$.

Comme la suite $(\text{Im } u^n) = (\bigcap_{p=0}^n \text{Im } u^p)$ est décroissante, $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{\infty} \text{Im } u^p = G$.

$\forall x \in F, u^n(x) = 0$ donc $F \subset \text{Ker } u^n$. On en déduit que $F \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} \text{Ker } u^p = \mathcal{N}_u$.

Or $\dim F = \dim E - \dim G$, $\dim \mathcal{N}_u = \dim E - \dim \mathcal{G}_u$ et $G = \mathcal{G}_u$. On en déduit $F = \mathcal{N}_u$.

III - ETUDE DE $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. a) Soit λ une valeur propre de A associée au vecteur propre X et M la matrice carrée d'ordre n dont chaque colonne est égale à X . On voit que $\phi_A(M) = MA = \lambda A$. λ est donc une valeur propre de ϕ_A .

Soit λ une valeur propre de ϕ_A associée à $M : \phi_A(M) = \lambda M$. Chaque colonne non nulle de M est alors un vecteur propre de A . λ est donc une valeur propre de A .

Les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ_a sont bien les valeurs propres de A .

b) $\psi_A(M) = MA$, or $MA = \lambda A$ si et seulement si ${}^t A M = \lambda {}^t M$

D'après la question précédente, les valeurs propres de l'endomorphisme ψ_a sont les valeurs propres de A .

2. a) $(A - \lambda I_n)^\alpha$ commute avec A donc $\text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ est stable par A .

$({}^t A - \mu I_n)^\beta$ commute avec ${}^t A$ donc $\text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$ est stable par ${}^t A$.

Si $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$, alors $AU \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et ${}^t AV \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$.

On en déduit que $\theta_A(U^t V) = AU^t V - U^t VA = (AU)^t V - V^t ({}^t AV) \in \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$. $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est donc stable par θ_A .

b) La restriction de $\phi_A - \lambda \text{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$, $(\phi_A - \lambda \text{Id})^\alpha(U^t V) = (A - \lambda I_n)^\alpha U^t V = 0$ car $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$.

De même, la restriction de $\psi_A - \mu \text{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est un endomorphisme nilpotent, en effet, pour $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$, $(\psi_A - \mu \text{Id})^\beta(U^t V) = U^t V(A - \mu I_n)^\beta = U^t (({}^t A - \mu I_n)^\beta V) = 0$ car $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$.

De plus ϕ_A et ψ_A commutent car pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi_A(\psi_A(M)) = \psi_A(\phi_A(M)) = AMA$, $\phi_A - \lambda \text{Id}$ et $\psi_A - \mu \text{Id}$ commutent donc également.

De la question II 2), on déduit que la restriction de $(\phi_A - \psi_A) - (\lambda - \mu)\text{Id}$ à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est un endomorphisme nilpotent.

De la question II 1), on déduit ensuite que la restriction de $\theta_A = \phi_A - \psi_A$ à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ possède $\lambda - \mu$ comme unique valeur propre.

Donc : la restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ possède $\lambda - \mu$ comme unique valeur propre.

3. a) On suppose que les familles $\mathcal{F} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ et $\mathcal{G} = (V_1, V_2, \dots, V_q)$ sont libres et on note $(b_{kj})_{1 \leq k \leq n}$ les coefficients de la matrice V_j .

Considérons une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \alpha_{ij} U_i^t V_j = 0$.

En séparant les deux sommes, $\sum_{i=1}^p U_i^t \left(\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} V_j \right) = 0$

On obtient une matrice carrée d'ordre n dont la k ième colonne est : $\sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} b_{kj} \right) U_i = 0$

Comme la famille $\mathcal{F} = (U_1, U_2, \dots, U_p)$ est libre, on en déduit que les scalaires $\sum_{j=1}^q \alpha_{ij} b_{kj}$ sont tous nuls, puis que

pour tout $i : \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} V_j = 0$ et comme $\mathcal{G} = (V_1, V_2, \dots, V_q)$ est libre, tous les α_{ij} sont nuls.

La famille $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ est donc libre

- b) Soit $U \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)^\alpha$ et $V \in \text{Ker}({}^t A - \mu I_n)^\beta$. De la décomposition de U dans la base \mathcal{B}_λ et de la décomposition de V dans la base \mathcal{B}_μ^* , on déduit immédiatement une décomposition de $U^t V$ dans $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$, donc $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$.

C'est une famille libre, d'après a).

$$\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^* \text{ est bien une base de } \mathcal{L}_{\lambda, \mu}.$$

- c) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A de multiplicités respectives : $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.

On utilise le théorème de décomposition des noyaux pour A et pour ${}^t A$:

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i} = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}({}^t A - \lambda_i I_n)^{\alpha_i}$$

On note (U_1, \dots, U_n) une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ adaptée à la première somme directe et (V_1, \dots, V_n) une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ adaptée à la seconde somme directe.

De 3.a), on déduit que $(U_i^t V_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une famille libre de n^2 vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On fait ensuite une partition de cette base : $(\mathcal{B}_{\lambda_i} \otimes \mathcal{B}_{\lambda_j}^*)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ ou bien avec les notations de l'énoncé :

$$(\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*)_{(\lambda, \mu) \in (\text{Sp } A)^2} \text{ d'où l'on déduit : } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{(\text{Sp } A)^2} \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$$

4. On a montré que $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est stable par θ_A et que la restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ possède $\lambda - \mu$ comme unique valeur propre. La restriction de θ_A à $\mathcal{L}_{\lambda, \mu}$ est donc bijective si $\lambda \neq \mu$, et nilpotente si $\lambda = \mu$.

$$\text{Notons } F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } A} \mathcal{L}_{\lambda, \lambda} \text{ et } G = \bigoplus_{\substack{(\lambda, \mu) \in (\text{Sp } A)^2 \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{L}_{\lambda, \mu}$$

On a évidemment $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = F \oplus G$, de plus la restriction de θ_A à F est nilpotente et la restriction de θ_A à G est bijective.

$$\text{De la question II 3.c), on déduit alors que } \mathcal{N}_{\theta_A} = F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } A} \mathcal{L}_{\lambda, \lambda}$$

5. a) Soient p_1, \dots, p_n des entiers positifs ou nuls tels que $\sum_{k=1}^n p_k = n$.

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 - n = \sum_{k=1}^n (p_k^2 - p_k) = \sum_{k=1}^n p_k(p_k - 1)$$

$$p_k \text{ est un entier naturel, donc } p_k(p_k - 1) \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n p_k^2 \geq n.$$

De plus $\sum_{k=1}^n p_k^2 = n$ si et seulement si les p_k sont tous égaux à 0 ou 1, comme $\sum_{k=1}^n p_k = n$, le seul cas possible pour

avoir $\sum_{k=1}^n p_k^2 = n$ est $p_k = 1$ pour tout k .

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 \text{ est bien minimal lorsque, pour tout } k, p_k = 1.$$

- b) En reprenant les notations de la question 4) : $\dim \mathcal{N}_{\theta_A} = \sum_{i=1}^r \alpha_i^2$, et $\sum_{i=1}^r \alpha_i = n$.

On se ramène à la question précédente en posant $\alpha_i = 0$ pour $r < i \leq n$.

On voit alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$ soit minimale est :

$$\forall i \in [1, n], \alpha_i = 1$$

Autrement dit : $\dim \mathcal{N}_{\theta_A}$ est minimale si et seulement si A possède n valeurs propres distinctes.

