

Préparation Concours (CNC-CCP)

Réduction

Problème : Exponentielle de matrices

Le but du sujet est d'étudier l'exponentielle de matrices, réelles ou complexes.

Dans tout le sujet, p désigne un entier naturel non nul. Si $\mathbb{K}$ désigne un corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on adopte les notations suivantes.

- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_p[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus p .
- $GL_p(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $M_p(\mathbb{K})$.
- $O_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients dans $\mathbb{R}$ d'ordre p . Plus précisément :

$$O_p(\mathbb{R}) = \{M \in GL_p(\mathbb{R}) \mid M^T \times M = I_p\}$$

On rappelle (ou admet) que :

- L'**orthogonal d'un sous-espace matriciel** E de $\mathbb{K}^p$ est $\{X \in \mathbb{K}^p \mid \forall Y \in E, Y^T \times X = 0\}$.
- On dit qu'une **suite de matrices** (M_n) de $M_p(\mathbb{K})$ **converge vers la matrice** M , si la suite (M_n) converge coefficients par coefficients vers de ceux de M .

$$\text{Formellement : } (M_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M \quad : \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_p, (i[M_n]^j) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (i[M]^j)$$

- On dit qu'une **matrice** M de $M_p(\mathbb{K})$ **est diagonalisable**, s'il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, diagonale telles que $M = P \times D \times P^{-1}$

Si $A \in M_p(\mathbb{K})$ on définit, lorsque cette limite existe,
$$E(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} A \right)^n.$$

I. Questions préliminaires.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. On note $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

- Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$.
 Puis calculer un équivalent de $\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x$ pour $n \rightarrow +\infty$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n > -a$.
 Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$, puis de $\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$ en fonction de a, b et n et, si nécessaire, la fonction arctan.
- En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^z$.

II. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

1. Matrices antisymétriques d'ordre 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Déterminer un nombre $\beta_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et le nombre réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que

$$\frac{1}{\beta_n} \left(I_2 + \frac{1}{n} A \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que $E(A)$ existe et qu'il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

On pourra, au passage, démontrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} \cos(m\theta_n) & -\sin(m\theta_n) \\ \sin(m\theta_n) & \cos(m\theta_n) \end{pmatrix}$$

2. Matrices antisymétriques d'ordre 3.

Soit $B \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique, non nulle.

On suppose, pour fixer les notations, que $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\frac{1}{2}\text{tr}(B^T \times B)$ est un nombre strictement positif.

On note $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(B^T \times B)}$.

(b) On note $X = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} ac \\ -ab \\ -b^2 - c^2 \end{pmatrix}$.

i. Calculer BX , BY et BZ .

On exprimera les résultats des calculs en fonctions de X, Y, Z et β

ii. Calculer $X^T \times X$, $Y^T \times Y$, $Z^T \times Z$ et $X^T \times Y$, $X^T \times Z$, $Y^T \times Z$.

iii. On suppose que $b^2 + c^2 > 0$. On note $x = \frac{1}{\beta}X$, $y = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}Y$ et $z = \frac{1}{\beta\sqrt{b^2+c^2}}Z$.

On note $P = (x|y|z)$ (matrice composée de trois colonnes). Calculer $B \times P$.

iv. Et montrer que $P \in O_3(\mathbb{R})$; en déduire une expression simple de P^{-1} .

(c) Déduire des questions précédentes l'existence de P de $O_3(\mathbb{R})$ et un réel $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\text{tr}(B^T \times B)}$ tels que

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(d) Montrer que $E(B)$ existe, on donnera son expression en fonction de P et de β .

III. Exponentielle de matrices diagonalisables.

1. Cas de matrices diagonales.

Soit $D \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

On suppose, pour fixer les notations, que $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbb{K})$.

On donnera l'expression explicite de $E(D)$ en fonction des coefficients λ_i .

(b) On note $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \forall i \in \mathbb{N}_p, P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}\}$. Quelle est la structure de l'ensemble $\mathcal{L}$?
Donner l'expression de Q , polynôme de degré minimal, élément de $\mathcal{L}$.

Donner le meilleur majorant possible du degré de Q ?

(c) Exprimer $E(D)$ en fonction de $Q(D)$.

(d) Montrer que si D_1 et D_2 sont diagonales, alors $E(D_1 + D_2) = E(D_1) \times E(D_2)$.

(e) Calculer $E(xI_p)$ ($x \in \mathbb{K}$), $E(0_p)$ (exponentielle de la matrice nulle), en déduire $E(D)^{-1}$.

2. Existence et propriétés de $E(A)$ lorsque A est diagonalisable.

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable (cf. définition en début d'énoncé).

On suppose, pour fixer les notations, que $A = P \times D \times P^{-1}$, où D est diagonale.

(a) Montrer que pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, on a

$$T(A) = P \times T(D) \times P^{-1}$$

(b) Montrer que $E(A)$ existe.

On donnera l'expression explicite de $E(A)$ en fonction de celle de $E(D)$, de P et P^{-1} .

(c) Soit $x \in \mathbb{K}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

3. Critère de diagonalisation

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable.

Ce critère nous servira pour répondre aux questions III.4.(d) et V.2.(e).iii.

On dit qu'un polynôme est *scindé à racines simples* si il est scindé et si les ordres de multiplicités de chaque racine valent 1.

- (a) On suppose que A est diagonalisable.

Montrer qu'il existe un polynôme scindé à racines simples qui annule A .

- (b) On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$, scindé, à racines simples tel que $T(A) = 0$.

On suppose, pour fixer les notations, que $T = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)$, avec $\mu_i \neq \mu_j$ dès que $i \neq j$.

On note, pour $i \in \mathbb{N}_r$, $E_i = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \mu_i X\}$ et $T_i = \prod_{j \neq i} (X - \mu_j)$.

- Montrer qu'il existe $U_1, \dots, U_r \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\sum_{i=1}^r U_i T_i = 1$.
- En déduire : pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $X = \sum_{i=1}^r [U_i(A) T_i(A)] X$, puis $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \sum_{i=1}^r E_i$
- On note, pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, $\mathcal{B}_i = (X_{1,i}, \dots, X_{a_i,i})$ une base de E_i , puis

$$P = (X_{1,1} \mid \dots \mid X_{a_1,1} \mid X_{1,2} \mid \dots \mid X_{a_2,2} \mid \dots \mid X_{1,r} \mid \dots \mid X_{a_r,r})$$

Montrer que P est inversible.

- Montrer que $P^{-1} \times A \times P$ est une matrice diagonale (que l'on donnera).

On pourra faire le calcul matriciel $A \times P$ par blocs colonne et reconnaître un calcul de la forme $P \times D \dots$

- (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir affirmer que A est diagonalisable.

4. Exponentielle de la somme.

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

Quitte à multiplier par des matrices d'opérations élémentaires à gauche et à droite,

il est possible de trouver $P_1 \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $A = P_1 \times D \times P_1^{-1}$,

où D est de la forme
$$\begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_r I_{n_r} \end{pmatrix} \quad \text{où } d_i \neq d_j$$

(les 0 qui figurent dans cette matrice sont des matrices rectangulaires nulles).

On note alors $C = P_1^{-1} \times B \times P_1$.

- (a) Montrer que C est diagonalisable et que C et D commutent.

(b) En déduire que C est de la forme
$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_r \end{pmatrix}$$

où pour tout réel $i \in \mathbb{N}_r$, C_i est une matrice carrée d'ordre n_i .

- Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}_r$, C_i est diagonalisable.
- Conclure qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
- En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

IV. Exponentielle de matrices nilpotentes.

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$ (on dit que A est nilpotente d'ordre k).

Soit également $B \in M_p(\mathbb{C})$ (on ne suppose rien sur B).

- Montrer que, pour $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq j \leq k$, $\text{Ker}(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\text{Ker}(A^j)$.
(C'est-à-dire : $\text{Ker}(A^{j-1}) \subset \text{Ker} A^j$ et $\text{Ker}(A^{j-1}) \neq \text{Ker} A^j$).
 - En déduire que $k \leq p$.
- Montrer que $E(A)$ existe.

On pourra appliquer la formule du binôme de Newton, puis passer à la limite et obtenir un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(A) = E(A)$

- Soit $B \in M_p(\mathbb{C})$. On suppose que A et B commutent et que $E(B)$ existe.

On admet que, pour tout entier i compris entre 1 et p ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} B \right)^{n-i}$$

Montrer que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B)$.

4. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que $E(xI_p + A) = e^x E(A)$.
5. Montrer que $E(A) - I_p$ est nilpotente.

V. Cas général ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Soit $A \in M_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$P_n(X) = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$$

1. Polynôme minimal

- (a) On définit $\mathbb{C}[A] = \text{vect}(A^k, k \in \mathbb{N})$.
Montrer que $\mathbb{C}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie.
On note $r = \dim(\mathbb{C}[A])$.
- (b) En déduire que $I_A = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(A) = 0\}$, l'ensemble des polynômes annulateurs de A , est non réduit à $\{0\}$.
- (c) On note $m = \min\{\deg(P), P \in I_A, P \neq 0\}$ et $\Pi \in I_A$, unitaire tel que $\deg \Pi = m$.
Montrer que $I_A = \Pi \cdot \mathbb{C}[X]$ (on pourra faire une division euclidienne).
- (d) Quel rapport entre r et m ?
 Π ainsi définie est unique, on l'appelle le polynôme minimal de A , on le note plutôt Π_A .

2. Décomposition de Dunford

On se place dans le corps $\mathbb{C}$, algébriquement clos. On suppose que $\Pi_A = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{m_i}$

- (a) Soit $C = \Pi_A \wedge \Pi'_A$, le PGCD de Π_A et de Π'_A .
Exprimer Π'_A . En déduire une expression sous forme de produits de C
- (b) On note S tel que $\Pi_A = S \times C$.
Exprimer simplement S , en fonction des λ_i . En déduire que $S \wedge S' = 1$
- (c) Montrer également qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}$ tel que $\Pi_A \mid S^\mu$.
- (d) En déduire qu'il existe U et $V \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$U\Pi_A + VS' = 1$$

puis que $V(A) \times S'(A) = I_p$.

- (e) (**) On définit par récurrence, si possible selon la méthode de Newton :

$$X_0 = A \quad \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = X_n - S(X_n) \times [S'(X_n)]^{-1}$$

- i. Montrer, en une seule récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $X_n \in \mathbb{C}[A]$, $S'(X_n)$ est inversible, $[S'(X_n)]^{-1} \in \mathbb{C}[A]$ et $S(X_n) \in S^{2^n}(A) \cdot \mathbb{C}[A]$.
On pourra calculer $S'(X_{n+1}) - S'(X_n) \dots$
- ii. Montrer que (X_n) est stationnaire. On note $K = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_{n+1} = X_n\}$.
- iii. Montrer que X_K est diagonalisable, $N_K = A - X_K$ est nilpotente et que X_K et N_K commutent.

On dit que l'on a obtenu la décomposition de Dunford de la matrice A :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), \exists D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable, } N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ nilpotente telles que } A = D + N \text{ et } D \times N = N \times D$$

3. Bilan

Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, admet une exponentielle $E(A)$.
Comment calculer $E(A)$, en exploitant la décomposition de Dunford?