EL Bilia Sup
Prepas MP

Prof. mamouni
myismail.net

Preparation Concours
Reduction

Thème : Crochet de Lie

Notations

E un K-ev tq $\dim E = n \geq 2$ (fini)

Si $(u,v) \in \mathcal{L}(E)$ on pose $[u,v] = u \circ v - v \circ u$

pour $u \in \mathcal{L}(E)$ fixe on considere $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$
$v \mapsto [u,v]$

Partie I Generalite

1) Mq φ_u est lineaire

2) Verifier que $\ker \varphi_u$ est une sous-alg de $\mathcal{L}(E)$

3) Mq $[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$
Identite de Jacobi

4) Mq $(\varphi_u)^k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} u^{k-i} \circ v \circ u^i$

5) En deduire que si u est nilpotent alors φ_u l'est aussi

Partie II / une CS de diagonalisation /

On suppose dans cette partie que u est diag^ble

pour cela on considère $A = \mathcal{M}_{B}(u)$ aussi diagonalisable

donc A admet une base propre $(X_1, \dots, X_n)$

où X_i des colonnes tq $AX_i = \alpha_i X_i$

(1)

Justifier l'existence d'une base propre de A^T, formée par des colonnes $(Y_1, \dots, Y_n)$ tq $A^T . Y_j = \alpha_j Y_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$

(2) On pose $\boxed{B_{i,j} = X_i . Y_j^T}$

~~Verifie~~ et que $[A, B_{ij}] = AB_{ij} - B_{ij} A$

(i) Verifier que $[A, B_{ij}] = (\alpha_i - \alpha_j) B_{ij}$

(ii) Que peut on dire de la famille $(B_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

(iii) Mq la famille $(B_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre

indic : supposer que $\sum_{i,j} \alpha_{ij} B_{ij} = 0$

et multiplier à droite par Y colonne qlq

(iv) Que peut-on dire de la famille $(B_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

(3) Selon les notations precedentes on considère

$v_{ij} \in \mathcal{L}(E)$ tq $B_{ij} = \mathcal{M}_{B}(v_{ij})$

(i) Que peut dire de la famille $(v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

(ii) En deduire que φ_u est diag^ble

Partie III / une CN de diagonalisation

dans partie II : on a mq u diagble $\Rightarrow \varphi_u$ diagble
On étudie dans cette partie la réciproque

On suppose alors $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ diagble

et on considère $(V_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ base propre de φ_u

càd $\exists\, \lambda_i \in K$ tq $[u, V_i] = \lambda_i V_i$

On suppose de plus que $\underset{K}{Sp}(u) = \phi$

Soit $\alpha \in Sp(u)$ fixé et $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ fixé tq $u(x_0) = \alpha x_0$

1) Justifier l'existence de $\alpha_i \in K$ tq $u(V_i(x_0)) = \alpha_i V_i(x_0)$ $\forall\, 1 \leq i \leq n^2$

2) Mq l'app $\phi : \mathcal{L}(E) \to E$, $V \mapsto V(x_0)$ est linéaire

3) Mq ϕ est surj
Indic : On pourra utiliser le thm de la base incomplète

4) Mq $\exists\, I \subset [\![1, n^2]\!]$ tq $(V_i(x_0))_{i \in I}$ base de E tq $\operatorname{card} I = n$
indic : on pourra utiliser le thm de la base extraite

5) En déduire que u est diagble

6) Conclure

Partie IV / Etude des noyaux

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\{u(x), x\}$ est liée $\forall x \neq 0_E$

i) Justifier l'existence de $\lambda_x \in K$ tq $u(x) = \lambda_x . x$

ii) Mq $\lambda_x = \lambda_y$ $\forall x, y \in E - \{0_E\}$

<u>indic</u> : Etudier les cas $\{x, y\}$ liée
$\{x, y\}$ libre

iii) En déduire $\exists \lambda \in K$ tq $u = \lambda . id_E$
(càd u homothétie)

2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $u \circ v = v \circ u$ $\forall u \in \mathcal{L}(E)$

i) Mq $\forall x \in E \setminus \{0_E\}$ $\{v(x), x\}$ est liée
on pourra raisonner par l'absurde
utiliser le thm de la base incomplète
mq $\exists \beta = (x_0, v(x_0), e_3 \dots e_n)$ base de E
considérer $u = p_{F // G}$ où $F = Vect\{x_0\}$
$G = Vect(v(x_0), e_3, \dots e_n)$

ii) En déduire que $v = \lambda id_E$
(lemme de Schur)

3) En déduire que $\bigcap_{u \in \mathcal{L}(E)} \mathrm{Ker}\, \varphi_u = \{\lambda\, id_E\}$

Partie V / Etude des images

① Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $\exists A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifiant

$$M = [A, B]$$

Mq $Tr(M) = 0$

② Dans la suite on s'intéresse à la réciproque

On considère $M \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $Tr(M) = 0$

On se propose de montrer d'abord par récurrence que sur $n \geq 1$

~~$\exists A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $M = [A, B]$~~

que M est semblable à une matrice de diagonale nulle

① Dire pourquoi le résultat est vrai pour $n = 1$

(ii) On suppose mtnt ~~A~~ $M \in \mathcal{M}_{n+1}(K)$ tq $Tr(M) = 0$

ⓐ Dire pourquoi le résultat est vrai si $M = \lambda I$

ⓑ On suppose $M \neq \lambda I$ et soit u endom associé à M

ie $M = \mathcal{M}_{\beta}(u)$

Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tq

$\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), e_3 \dots e_n)$ soit base de E

<u>Indic</u> : utiliser lemme de Schur

ⓒ En déduire que $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & N \end{pmatrix}$

avec $Tr(N) = 0$

ⓓ En déduire $M \sim M'$ tq diagonale de M' est nulle

(3) Avec les notations de la qst (2)

(a) Mq $[M''D - DM'']$ est une matrice de diagonale nulle pour toute matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et toute matrice M''

indic Calculer les coeff de $M''D$ puis ceux de DM''

(b) En deduire l'existence d'une matrice M'' tq **M'' D – DM'' = M'**

(4) En deduire que si $\mathrm{Tr}(M) = 0$ alors $\exists A, B \in M_n(K)$ tq $M = [A, B]$

(5) En deduire que $\bigcup_{u \in \mathcal{L}(E)} \mathrm{Im}\, \varphi_u = \{ w \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Tr}(w) = 0 \}$

puis $\bigcup_{u \in \mathcal{L}(E)} \mathrm{Im}\, \varphi_u$ est un sev

(6) Donner un exple où $\underset{\mathrm{Im}\, u}{F}, \underset{\mathrm{Im}\, v}{G}$ sev mais $F \cup G$ ne l'est pas

indic : utiliser $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

$v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto i\, \mathrm{Im}(z)$

FIN

BONNE CHANCE