Prépas ELBILIA

Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Préparation aux Concours

Probabilités Discrètes

Theme 1 — loi dzeta

Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $x > 1$ fixe

on dit que X suit la loi dzeta si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

et $\boxed{p(X=n) = \dfrac{1}{\zeta(x) n^x}}$

où $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$

on note alors $X \hookrightarrow \zeta(x)$ qu'on suppose vraie dans la suite

1) mq la loi de ζ est bien définie

2) mq $E(X)$ est bien définie $\Leftrightarrow x > 2$ donc dans ce cas $E(X)$

3) Mq qst form $m_r(X)$ et $V(X)$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixe

mq $p(n \text{ divise } X) = \dfrac{1}{n^x}$

5) on note $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite ordonnée des nombre premiers

i) Mq les evt $(p_i \text{ divise } X)_{i \in \mathbb{N}}$ sont mutuellt indépdt

ii) En deduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \bigcap_{k=1}^{n} (p_i \text{ ne divise pas } X) = p(X=1)$$

6) En deduire que

$$\boxed{\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)}$$

7) Application 1 : Soit $X \sim Y \hookrightarrow \zeta(x)$ et indépdt

mq $\boxed{p(X \wedge Y = 1) = \frac{1}{\zeta(2x)}}$

indic : exprimer l'evt $X \wedge Y = 1$ à l'aide

des evt $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} (p_k \text{ ne divise pas } X) \cup (p_k \text{ ne divise pas } Y)$

8) Application 2 :

i) Mq $\zeta(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x > 1}}{\sim} \frac{1}{x-1}$

ii) En deduire que $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$

iii) En deduire que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge

9)

Theme 2 / Demo du thm de Stone-Weirstrass

On se propose de demontrer ici le resultat suivant : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue

Alors $\exists (P_n) \in \mathbb{R}[X]$ tq $P_n \xrightarrow{cu} f$ sur $[0,1]$

on fixe $x \in [0,1]$ et on considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ VAR indpdt

tq ~~X_n~~ $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, x)$

1. Mq $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$ $\forall \delta > 0$

2. En deduire que $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$

3. Justifier le resultat suivant
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $\forall x, y \in [0,1]$
   $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

4. on pose $P_n(x) = E\left(f\left(\frac{X_n}{n}\right)\right)$

   i) Exprimer $P_n(x)$ sous forme polynomiale

   ii) ~~En de~~ Mq $|P_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

5. Conclure le resultat demandé

6. Dire comment montrer le thm ds le cas où $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

Theme 3 / Cvgce en loi et en proba /

① Rappeller les def des notions de cvge en loi
cvge en proba

qui implique l'autre

Donner un c-Exple pour la reciproque fausse

② Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ VAR indpdt tq $X_n \sim X$ tq $E(X)<\infty$
$V(X)<\infty$

(i) Mq $E(\bar{X}_n) = E(X)$, $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} V(X)$

où $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

(ii) En deduire que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X)$

thm de la loi faible des grands nombres

③ Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n)$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} n p_n = \lambda > 0$

(i) Mq $(1-p_n)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\lambda}$

(ii) Soit $k\in\mathbb{N}^*$ fixé. Dire pourquoi $p(X_n=k)=0$
$\forall n<k$

(iii) on fixe $k\in\mathbb{N}^*$ et on considère n qlq tq $n\geq k$

Mq $\binom{n}{k} p_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}$

(iv) En deduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $\forall k\in\mathbb{N}$
fixé

(v) En deduire que $X_n \xrightarrow{L} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Thème 5 — Cvge en Probas : qlq propriétés

Soit X_n, X, Y des VAR tq $X_n(\Omega) = X(\Omega) = Y(\Omega)$

et tq $X_n \xrightarrow{P} X$

1. Mq $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0$ tq $p(|X| \geq A) < \varepsilon/3$

$p(|Y| \geq A) < \varepsilon/3$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$ $p(|X_n - X| \geq 1) \leq \varepsilon/3$

2. Justifier que $(|X_n| \geq B) \cap (|X_n - X| < 1) \subset |X| > A$

où $B = A + 1$

3. En déduire que $p(|X_n| \geq B) \leq p(|X_n - X| \geq 1) + p(X > A)$

$\leq 2\varepsilon/3$

4. En déduire que

$$p(|X| \geq B) + p(|Y| \geq B) + p(|X_n| \geq B) < \varepsilon$$

5. Soit $a > 0$ fixé

a) Mq $p(|YX_n - YX| \geq a) \leq p(|Y| \geq B) + p\left(|Y| \leq B \cap |X_n - X| \geq \frac{a}{B}\right)$

b) En déduire que $YX_n \xrightarrow{P} YX$

6. Soit f unif cont sur $\mathbb{R}$. Mq $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$

7. En déduire que si f cont sur $\mathbb{R}$

Alors $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$

indic : utiliser f unif cont sur $[-B, B]$

Thème 6 / Un peu de proba Preliminaire

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé denombrable

$\mathcal{L}^2 = \{ X \text{ VAR tq } E(X^2) < \infty \text{ tq } P(X=x) \neq 0 \ \forall x \in X(\Omega) \} \cup \{ X = 0 \}$

(1) mq $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ definit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2$

mq d'abord qu'il est bien defini

(2) (i) Soit $X \in \mathcal{L}^2$ trouver $d(X, F)$ où $F = \{ X \text{ VAR cte} \}$

(ii) Retrouver la formule $V(aX+b) = a^2 V(X)$

$\sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$

indic on pourra calculer $d(aX+b, F)$

(3) Soit $X, Y \in \mathcal{L}^2$ tq $X \neq cte$, $Y \neq cte$

~~determiner~~ mq $\boxed{d(X, \text{Vect}(1, Y))^2 = \dfrac{V(X)V(Y) - \text{cov}(X,Y)^2}{V(Y)}}$

(4) Retrouver le resultat suivant

$$-1 \leq \rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} \leq 1$$

(5) Etudier le cas d'egalité

FiN

&

Bonne Chance