Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Préparation aux Concours

Réduction & Algèbre Linéaire

Dans tout le document $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-ev

Partie I : Dualité

Forme linéaire : tout appl linéaire $\varphi : E \to K$

Dual de E : $E^* = \mathcal{L}(E, K) = \{\varphi : E \to K \text{ linéaire}\}$

hyperplan : H sev de E tq H admet un sev supplémentaire de $\dim = 1$

c-à-d $\exists a \in E$ tq $E = H \oplus Ka$

① mq H hyperplan de $E \Leftrightarrow \exists \varphi \in E^*$ tq $\varphi \neq 0$ et $H = \operatorname{Ker} \varphi$

② soit H hyperplan et $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$ tq $H = \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$

mq $\exists \lambda \in K$ tq $\psi = \lambda \varphi$

③ on suppose $\dim E = n \geq 2$ finie

ⓘ soit $\mathcal{B} = (e_1 \ldots e_n)$ base de E

mq $\exists! \mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots e_n^*)$ base de E^* tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

$\uparrow$ base duale de E

(ii) Mq dans ce cas $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $x_i = e_i^*(x)$

(iii) En déduire la base duale dans les cas suivants

a) $\beta = (L_1, \dots, L_n)$ base d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

b) $\beta = ((X-a)^k)_{0 \le k \le n}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

c) $(N_k)_{0 \le k \le n}$ où $N_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ et $N_0 = 1$

indic : Utiliser $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$

4) On suppose encore $\dim E = n \geq 2$ (finie)

(i) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ libre dans E^* et $\varphi \in E^*$

Mq $\varphi \in Vect(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \iff \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi$

indic : thm de la base incomplète
+ Notion de base antiduale

(ii) Mq le résultat ci-dessus est encore valable même si $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est liée

(iii) En déduire que tout sev $F \subset E$ tq $\dim F = p$
$\iff$ F est définie par $n-p$ eq indépdt

(5) On suppose tjr $\dim E = n \geq 2$ finie
et $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ famille d'elts de E^*

on pose $u : E \to K^p$
$x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$

(a) Mq $\dim \operatorname{Ker} u = n - rg(\varphi_1 \dots \varphi_p)$

(b) En deduire que

$(\varphi_1 \dots \varphi_p)$ libre $\Leftrightarrow$ u surj

—— gen $\Leftrightarrow$ u inj

—— base $\Leftrightarrow$ u isom

Partie II Matrice Compagnon

Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ on pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$$

(1) Mq $\chi_M(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$

(2) Mq $\dim E_\lambda(M) = 1 \quad \forall \lambda \in \underset{\mathbb{C}}{Sp}(M)$

(3) En deduire que M est diagble $\Leftrightarrow$ χ_M scindé à racine simple

(4) on suppose M est diagonalisable

(i) Dire pourquoi M^T est aussi diag^{ble}

(ii) Diagonaliser M^T puis M

(5) Application

(i) Dire comment étudier une suite récurrente linéaire d'ordre k

(ii) . . . . éq diff linéaire d'ordre k

Partie III / Endom Cyclique

on suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (finie)

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique ssi $\exists x_0 \in E$ tq

$\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ base de E

(1) Mq dans ce cas on a

(i) $M_{\mathcal{B}}(u) = M$ (matrice compagnon)

(ii) $\Pi_u = \chi_u$ avec $(id_E, u, \ldots, u^{n-1})$ libre

(iii) $C(u) = K(u) = \text{Vect}(id_E, u, \ldots, u^{n-1})$

$C(u) \{ v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u \}$

$K(u) = \{ v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } v = P(u) \text{ où } P \in \mathbb{K}[X] \}$

(iv) $\dim C(u) = n$

(4)

② Mq tout end nilpotent d'indice $p = n$ est cyclique

③ Mq tout end tq χ_u est scindé à racine simple est aussi cyclique

Partie IV — Lemme de Schur

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

① Mq $u = \lambda id_E \iff \{x, u(x)\}$ est liée $\forall x \neq 0_E$

② En deduire que $u \circ v = v \circ u \ \forall v \in \mathcal{L}(E) \iff u = \lambda id_E$

③ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $Tr(AM) = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Mq $A = 0$

④ Soit $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tq $\varphi(AB) = \varphi(BA)$

ⓐ Mq $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\varphi(M) = Tr(A.M) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

ⓘⓘ En deduire $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tq $\varphi = \lambda Tr$

⑤ <u>Une application</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Mq $Tr(A) = 0 \implies A \sim B$ tq diagonale de $B = 0$

<u>ie</u> $b_{ii} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$

<u>indic</u> : supposer $A \neq \lambda I$, lemme de Schur et recurrence sur n

Partie V — Crochet de Lie

on considère ici E $\mathbb{K}$-ev tq $\dim E = n \geq 2$ (finie)

$\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ on pose $[u, v] = u \circ v - v \circ u$

et $\varphi_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$
$v \mapsto [u, v]$

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\quad [A, B] = AB - BA$

et $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$B \longmapsto [A, B]$

1) $\boxed{\text{On suppose que } A \text{ est diagonalisable}}$

i) Justifier l'existence de $(X_1, \dots, X_n)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $(Y_1, \dots, Y_n)$ base de $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tq $AX_i = \alpha_i X_i$ et $A^T \cdot Y_j = \alpha_j Y_j$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

ii) On pose $B_{ij} = X_i \cdot Y_j^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a) Mq $\varphi_A(B_{ij}) = (\alpha_i - \alpha_j) B_{ij}$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

b) Mq $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

iii) $\boxed{\text{Conclure que } \varphi_A \text{ est diagable}}$

② On s'intéresse ici à la réciproque

$\boxed{\text{On suppose que } \varphi_u \text{ est diagble}}$

on suppose de plus que $\boxed{Sp_K(u) \neq \phi}$

on pose $sp(\varphi_u) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ et $(V_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ base propre de φ_u

on considère $\lambda \in Sp_K(u) \neq \phi$ et $x_0 \in E$ tq $x_0 \neq 0_E$

et $u(x_0) = \lambda x_0$

i) Vérifier que $\forall 1 \leq i \leq n^2$, $\exists \alpha_i \in K$ tq $u(V_i(x_0)) = \alpha_i V_i(x_0)$

ii) Mq l'app $\phi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow E$, $V \longmapsto V(x_0)$ est lin et surj

indic : thm de la base incomplète

iii) En déduire que $\exists I \subset [\![1, n^2]\!]$ tq $\operatorname{Card} I = n$

et $(V_i(x_0))_{i \in I}$ base de E

iv) $\boxed{\text{Conclure que } u \text{ est diagble}}$

③ Justifier que $\bigcap_{A \in \mathcal{M}_n(K)} \ker \varphi_A = \{\lambda I_n \text{ tq } \lambda \in K\}$

et est de dim $= 1$

(4) (i) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

donner les coeff de $\varphi_A(D)$

(ii) En deduire que $\bigcup_{A \in \mathcal{M}_n(K)} \mathrm{Im}\, \varphi_A = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Tr}$

et que sa dim est egale à $n^2 - 1$

(iii) En deduire que $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\forall B \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $\mathrm{Im}\, \varphi_A \subset \mathrm{Im}\, \varphi_B$

ou

$\mathrm{Im}\, \varphi_B \subset \mathrm{Im}\, \varphi_A$

Partie VI — Projecteurs spectraux

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (finie)

et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\Pi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ scindé dans K

et on pose $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$

(1) Justifier que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$

on pose $p_i = p_{E_i \parallel \bigoplus_{j \neq i} E_j}$

(2) Justifier que $id_E = \sum_{i=1}^{r} p_i$ et que $u = \sum_{i=1}^{r} u \circ p_i$

(3) mq $\forall 1 \leq i \leq r$, $\exists Q_i \in K[X]$ tq $p_i = Q_i(u)$

(4) On suppose que u est diagble cè $\alpha_i = 1$ $\forall 1 \leq i \leq r$

mq $u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Partie VII / Diagonalisation simultanée /

On suppose ici $\dim E = n \geq 2$ (fini)

on considère $\boxed{u, v \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } u \circ v = v \circ u}$

1) on suppose que $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé à racine simple

i) Mq $\forall x \in E_{\lambda_i}(u)$, on a $\{x, v(x)\}$ est liée

ii) En déduire que $\exists \beta = (e_1 \ldots e_n)$ base propre de E associée à la fois à u et à v

on dit alors que u et v sont simult diag^ble

iii) En déduire que ds ce cas $u+v$ est aussi diag^ble

2) On suppose ici que u et v sont tous les deux diag^ble

i) Justifier que $v|_{E_{\lambda_i}(u)}$ est bien définie et diag^ble

ii) pareil que VII.1.ii

iii) " " VII.1.iii

3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) Justifier que A, B diag^ble mais A+B ne l'est pas

ii) Conclure

Partie VIII — Decomposition de Dunford

On suppose ici de demontrer le resultat suivant

$\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$ tq $\chi_A(X)$ est scindé

$\exists! D \in \mathcal{M}_n(K)$ diagble

$\exists! N \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotent tq $A = D + N$

$DN = ND$

D est un polynôme en A

$\chi_A(X) = \chi_D(X)$

On considère alors E K-ev tq $\dim E = n$

β base de E tq $A = \mathcal{M}_\beta(u)$

$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, $E_i = \ker(u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$

et $p_i = p_{E_i \parallel F_i}$ où $F_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$

avec $id_E = \sum_{i=1}^{r} p_i$ et $p_i = Q_i(u)$ poly en u

voir partie VI

① Mq $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ est diagble

② Mq $w = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \, id_E) \circ p_i$ est nilpotent

indic : la somme d'endo nilpotent qui commutent est aussi nilpotent

③ Justifier que $u = v + w$, v poly en u, $\chi_u(X) = \chi_v(X)$

④ En deduire l'existence puis l'unicité

⑤ Application : Mq A diagble $\Leftrightarrow e^A$ diagble

Partie IX — Décomposition de ~~Dunford~~ Frobenius

on considère ici E un $\mathbb{K}$-ev tq $\dim E = n \geq 2$ finie

$\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E fixé et $A = \mathcal{M}_\beta(u)$

on se propose de montrer ici le résultat suivant

$$\boxed{\begin{array}{c} A \sim \text{une matrice diagonale par bloc} \\ \text{dont tous les blocs sont des} \\ \text{matrices compagnon} \end{array}}$$

① Soit $(F_i)_{1 \leq i \leq m}$ des sev de E tq $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$ sev de E

mq $\exists 1 \leq i \leq m$ tq $F_j \subset F_i \quad \forall 1 \leq j \leq m$

indic : par l'absurde et $F_1 \neq \bigcup_{i=1}^{m} F_i$

② Soit $x \in E$, $x \neq 0_E$ fixé

i) mq $I_x = \{ P \in \mathbb{K}[X] \text{ tq } P(u)(x) = 0 \}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un poly minimal noté Π_x

ii) Dire pourquoi $\Pi_x \mid \Pi_u$

iii) En déduire que $\{ \Pi_x ,\ x \in E \}$ est fini

iv) En déduire que $\exists x_1 \in E$ tq $\Pi_{x_1} = \Pi_u$

indic : utiliser IX.1 pour $\bigcup_{x \in E} \ker(\Pi_x(u))$

③ On reprend les notations de la qst precedente

on pose $d = \deg(\Pi_u) = \deg(\Pi_{x_1})$

et $F_1 = \{ P(u)(x_1)$ tq $P \in K[X] \}$

ⓐ Mq $(e_1 = x_1, e_2 = u(x_1), \ldots, e_d = u^{d-1}(x_1))$ est libre de E

que $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d)$ et F_1 stable par u

ⓘⓘ Justifier que $u_{|F_1}$ est cyclique

④ on pose $G_1 = \{ x \in E$ tq $e_d^*(u^k(x)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \}$

où $\underbrace{(e_1, \ldots, e_n) \text{ base de } E}_{\text{thm de la base incomplete}}$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale

ⓘ Justifier que G_1 stable par u et $F_1 \cap G_1 = \{0_E\}$

ⓘⓘ En deduire que l'app $\varphi : E \to K^d$
$x \mapsto (e_d^*(x), e_d^*(u(x)), \ldots, e_d^*(u^{d-1}(x)))$

où $\varphi_{|F_1}$ est un isom

ⓘⓘⓘ En deduire que φ est surj

ⓘⓥ " " $E = F_1 \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$

ⓥ Verifier que $G_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi$

⑤ Conclure le resultat demandé

Partie X / Invariants de similitudes /

E K-ev, $\dim E = n \geq 2$ (finie) $u \in \mathcal{L}(E)$

① Montrer le résultat suivant : pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$

il existe une unique famille de polynômes $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$

et une ~~unique~~ famille de sev $(E_i)_{1 \leq i \leq r}$ stable par u

tq $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$

$u_{/E_i}$ cyclique $\forall 1 \leq i \leq r$

$\Pi_{u/E_i} = P_i$ divise P_{i-1} $\forall 2 \leq i \leq r$

les polynômes $P_1, \dots, P_r$ s'appelle invariants de similitude de u

② Justifier que la famille $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ ne dépend pas du choix de la base de E

donner la déf d'invariants de similitude pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$

③ En déduire que deux matrices sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude

④ Donner les invariants de similitude d'un endo nilpotent

⑤ Application : Décomposition de Jordan (Version 1)

Mq toute matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par bloc dont tous les blocs sont de la forme $N_r = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑥ Version 2 : Même qst que ⑤ mais avec $N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Partie XI — Retour aux endom cycliques

E un K-ev tq $\dim E = n \geq 2$ (finie) et $u \in \mathcal{L}(E)$

(1) On suppose que $\boxed{\chi_u = \pi_u}$, mq u est cyclique

(2) On suppose que $(id_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre. Mq u est cyclique

(3) On suppose $\boxed{\dim K[u] = n}$, mq u est cyclique

(4) On utilise ici les notations de partie X

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i \quad \text{et } E_i \text{ stable par } u \text{ et } u_{/E_i} \text{ cyclique}$$

on note $p_i = p_{E_i // F_i}$ où $F_i = \bigoplus_{j \neq i} E_j$

(i) Mq l'app $\phi : \mathcal{L}(E_1) \times \dots \times \mathcal{L}(E_r) \to \mathcal{L}(E)$

$$(v_1, \dots, v_r) \longmapsto v = \sum_{i=1}^{r} v_i \circ p_i$$

est bien définie

linéaire et injective

(ii) Soit $v_i \in C(u_{/E_i})$ (le commutant)

Mq $v = \phi(v_1, \dots, v_r) \in C(u)$

(iii) En déduire que $\boxed{\dim C(u) \geq n}$

(5) Mq $\boxed{\dim C(u) = n \Rightarrow u \text{ cyclique}}$

(6) Conclure que

$$\begin{aligned} u \text{ cyclique} &\Leftrightarrow \chi_u = \pi_u \\ &\Leftrightarrow \deg \pi_u = n \\ &\Leftrightarrow (id_E, u, \dots, u^{n-1}) \text{ libre} \\ &\Leftrightarrow \dim K[u] = n \\ &\Leftrightarrow \dim C(u) = n \end{aligned}$$

Partie XII / Qlq Applications /

$\dim E = n \geq 2$ finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

1) i) On suppose que u est cyclique, $\boxed{\text{Mq } \chi_u(u) = 0}$

ii) En deduire que $\chi_u(u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$

2) i) Mq toute matrice compagnon est semblable à sa transposée

ii) En deduire que le resultat est encore vrai pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3) i) Justifier que $n \leq \dim C(u) \leq n^2$

ii) Etudier les cas d'egalite

4) i) Justifier que $1 \leq \dim K(u) \leq n$

ii) Etudier les cas d'egalite

FIN ET
BONNE CHANCE