Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Probabilités Discrètes

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E, alors :

$$\operatorname{Ker}[T(u)] = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.
On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \ldots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \ldots + R_m Q_m = 1$.

Q9. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \ldots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace propre caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\ p_1 \oplus \mathrm{Im}\ p_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}\ p_m$.

Q12. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $N_i = \mathrm{Im}\ p_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.
Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

(b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

(c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

Q18. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \; p_i$.

Nous allons étudier une "réciproque".

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q, on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q \; f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.

FIN

Problème

Partie I

6°. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$$\begin{aligned} &\Pi_1 \cdot \Pi_2 = 0; \quad \Pi_1 + 5\Pi_2 = A; \quad \Pi_1 + \Pi_2 = I_2 \\ &\Pi_1^2 = \Pi_1; \quad \Pi_2^2 = \Pi_2. \end{aligned}$$

Remarque : $\forall q \in \mathbb{N};\qquad A^q = \Pi_1 + 5^q \Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5^q+1 & 5^q-1 \\ 5^q-1 & 5^q+1 \end{pmatrix}.$

7°.

$$\begin{aligned} Q(u)\circ P(u) = &(PQ)(u), \text{ Soit } x \in E : \\ x \in \operatorname{Ker} P(u) &\Longrightarrow P(u)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow Q(u)\circ P(u)(u) = 0 \\ &\Longrightarrow (PQ)(u)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \ker(PQ)(u). \end{aligned}$$

Donc $\ker P(u) \subset \ker(PQ)(u)$ De même $\operatorname{Ker} Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$.
Donc $\operatorname{Ker} P(u) + \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$.

$$P \wedge Q = 1 \Longrightarrow \exists U, V \in \mathbb{C}[X] / U\cdot P + V \cdot Q = 1$$

alors $\boxed{\forall x \in E,\ x = U(u)\circ P(u)(x) + V(u)\circ Q(u)(x) = y + z}$
Si $x \in \operatorname{Ker}(PQ)(u)$ alors $y \in \operatorname{Ker} Q(u)$ et $z \in \operatorname{Ker} P(u)$ donc $\operatorname{Ker}(PQ)(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$.
Par conséquent $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$.
de plus si $x \in \operatorname{Ker} P(u) \cap \operatorname{Ker} Q(u)$, alors $x = 0$ d'après l'égalité encadré précédente :
donc $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$

8°. $\Pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}, Q_1 = P_2^{k_2} : Q_2 = P_1^{k_2}$
$P_1 \wedge P_2 = 1 \Longrightarrow P_1^{k_1} \wedge P_2^{k_2} = 1$
Donc $Q_1 \wedge Q_2 = 1$
$\exists R_1, R_2 \in \mathbb{C}[X] / R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

9^o. $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ supposons que : $i \neq j$, alors

$$p_i \circ p_j = (R_i R_j)(u) \circ (Q_i \cdot Q_j)(u)$$

or $\left(Q_i Q_j\right) = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}} \cdot \dfrac{\pi_u}{P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i} P_j^{k_j}} = \pi_u \cdot \prod\limits_{\substack{\ell \neq i \\ \ell \neq j}} P_\ell^{K_\ell}$ donc $\left(Q_i Q_j\right)(u) = 0$, alors $p_i \circ p_j = 0$.

et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} p_i &= \sum_{i=1}^{m} (R_i Q_i)(u) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} R_i Q_i\right)(u) \\ &= 1(u) \\ &= id_E\end{aligned}$$

pour j fixé :

$$\begin{aligned}p_j &= p_j \circ id_E \\ &= p_j \circ \sum_{i=1}^{m} p_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_j \circ p_i \\ &= p_j^2\end{aligned}$$

donc p_j est 1 projecteur :

10^o. les λ_i sont $\neq 2$ à 2, alors les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux 2 à 2 , par application du lemme des noyaux et de cayley-Hamilton.

$$\begin{aligned}\bigoplus_{1 \leq i \leq m} N_i &= \bigoplus_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i} \\ &= \operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{m} \left(u - \lambda_i id_E\right)^{\alpha_i} \\ &= \operatorname{Ker} X_u(u) \\ &= \operatorname{Ker} \theta \\ &= E\end{aligned}$$

11^o. Soit $x \in E$ d'après Q9; $x = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(x)$ donc $E \subset \sum\limits_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$, alors l'égalité, et si $y_i \in Im(p_i) = \ker\left(p_i - id_E\right) / \sum\limits_{i=1}^{m} y_i = 0$ alors $y_i = p_i\left(y_i\right)$.

Soit j fixé, alors $0 = \sum\limits_{i=1}^{m} p_j \circ p_i\left(y_i\right) = p_j\left(y_j\right) = y_j$

Donc $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} Im(p_i)$.

12^o. Pour i fixé et $y_i \in Im(p_i)$ donc $y_i = p_i\left(y_i\right)$ alors $y_i = (Q_i R_i)(u)$, par conséquent

$$\begin{aligned}(u - \lambda_i id)^{\alpha_1}\left(y_i\right) &= \left(P_i^{\alpha_i} Q_i R_i\right)(u) \\ &= (\pi_u \cdot R_i)(u) \\ &= \pi_u(u) \circ R_i(u) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $y_i \in Ker\,(u - \lambda_i \lambda)^{\alpha_i} = N_i$.
Donc

$$Im(p_i) \subset N_i$$

Si $\exists i \quad Im(p_i) \subsetneq N_i$, alors $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m} \mathbf{Im}(p_i) \subsetneq \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant m} N_i = E$, absurde

donc $\forall i \in \{1,...,m\} \quad \mathbf{Im}\, p_i = N_i$

Partie II

13^o. Π_u est simplement scindé car u est diagonalisable, donc

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i).$$

14^o. Posons $\dfrac{1}{\pi_u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dfrac{b_i}{x - \lambda_i}$, ona $b_i = \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\pi_u}\right)(\lambda_i) = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)} = \theta_i$

donc $\dfrac{1}{\pi_u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\theta_i}{X - \lambda_i}$:, donc $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \theta_i \dfrac{\pi_u}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$, d'après la définition de p_i on a $p_i = \theta_i Q_i(u)$. Alors $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

15^o. On pose $\dfrac{X}{\pi_u} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dfrac{c_i}{X - \lambda_i}$ avec $c_i = \left(\dfrac{X(X - \lambda_i)}{\pi_u}\right)(\lambda_i) = \left(\dfrac{X}{Q_i(X)}\right)(\lambda_i) = \dfrac{\lambda_i}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donc $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(X)$.

Alors $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$.

16^o. **a/** A est symétrique réelle donc diagonalisable et $A^2 = 4I_4$ (Calcul).

b/ $X - 2$ et $X + 2$ ne sont pas des annulateurs de A donc $\pi_A = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$.
$Sp(A) = \{2, -2\}$: On prend $\quad \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -2$.
Alors $A = 2\Pi_1 + (-2)\Pi_2$: avec $\Pi_1 = \dfrac{A + 2I_4}{4}, \Pi_2 = \dfrac{A - 2I_4}{-4}$ car $Q_1 = \dfrac{\Pi_A}{X-2} = X + 2;$ $\quad Q_2 = \dfrac{\Pi_A}{X+2} = X - 2$.

Alors $\Pi_1 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c/ Alors $\forall q \in \mathbb{N}: \quad A^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2 \quad$ par récurrence car $\Pi_1 \cdot \Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1 = 0$.

17^o. Soit $d = d^0 \pi_V$: Montrons que $\quad \mathbb{C}[v] = \mathbf{vec}\left(id, v, ..., v^{d-1}\right)$. On a $\mathbf{vect}(\text{ id}, v, \ldots, v^{d-1}) \subset \mathbb{C}[v]$.
soit $P \in \mathbb{C}[X] \quad \exists Q, R \in \mathbb{C}[X] \mid \quad P = \pi_v \cdot Q + R$ avec $d^0 R < d^0 \pi_v = d$ alors $P(v) = \pi_v(v) \circ Q(v) + R(v) = R(v)$.
donc $P(v) \in \mathbf{vec}\left(id, v, \ldots, v^{d-1}\right)$. Donc $\mathbb{C}[v] = \mathbf{vect}\left(id, v, \ldots, v^{d-1}\right)$.
Par l'absurde si $\exists \alpha_0, ..., \alpha_{d-1} \in \mathbb{C}$ non tous nuls tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i v^i = 0$ alors le polynôme $L = \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i X^i$ est annulateur de v et $L \neq 0$ et $d^0 L < d = d^0 \pi_v$ ce qui est absurde avec la définition de π_v.
donc $\left(id_E, v, ..., v^{d-1}\right)$ est libre, donc base de $\mathbb{C}[v]$ alors $\mathbf{dim}\,\mathbb{C}[v] = d = d^0 \Pi_V$.

18^o. Supposons que $\pi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$: On a : $\quad p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} \in \mathbb{C}[u]$:

Donc $\text{vect}\left(p_1, ..., p_m\right) \subset \mathbb{C}[u]$: et $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$: $\quad id = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$, alors par les questions ($Q9 + Q15$) et par récurrence $\forall q \in \mathbb{N} \quad u^q = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i \in \text{vect}(p_1, ..., p_m)$.

donc $C[u] = \mathbf{vect}\left(p_1, \ldots, p_m\right)$: et si $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{C} \mid \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i = 0$.

Alors pour j fixé $\quad \sum_{n=1}^{m} \alpha_i p_j \circ p_i = 0$: donc $\quad \alpha_j p_j = 0$ donc $\alpha_j = 0$ car $p_j \neq 0$. Donc $\left(p_1, \ldots p_m\right)$ base de $\mathbb{C}[u]$.

19°. Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: $\quad B^2 = 0; \quad B \neq 0$, B est donc non diagonalisable, soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Sp(A) = \{0, 1\}$$

Car $\chi_A = \chi_B \cdot (X-1) = X^2(X-1)$; et $A(A - I_3) \neq 0$, alors $\Pi_A = X^2(X-1)$: donc A est non diagonalisable : $d^0 \Pi_A = 3$: mais ici on a seulement deux projecteurs associés à A qu'on note Π_1 er Π_2.
d'après Q17 : $\quad \dim \mathbb{C}[A] = d^0 \pi_A = 3$. Mais $\quad \dim \mathrm{vect}\left(\Pi_1, \Pi_2\right) \leqslant 2$: donc $\left(\Pi_1, \Pi_2\right)$ n'est pas une base de $\mathbb{C}[A]$:

20°. Supposons que $\forall q \in \mathbb{N}$: $\quad u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$ soit $P = \sum_{q=0}^{N} a_q X^q \quad ; N$ fixé dans $\mathbb{N}$: alors :

$$P(u) = \sum_{q=0}^{N} a_q u^q = \sum_{q=0}^{N} a_q \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$$

Donc

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{q=0}^{N} a_q \lambda_i^q \right) f_i = \sum_{i=1}^{m} P\left(\lambda_i\right) f_i$$

Alors :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \qquad P(u) = \sum_{i=1}^{m} P\left(\lambda_i\right) f_i$$

Si on prend $P = \prod_{i=1}^{m} \left(X - \lambda_i\right)$ qui est scindé à racines simples, de plus d'après l'égalité précédente $P(u) = 0$; donc u est diagonalisable.

Pour vos remarques sadikoulmeki@yahoo.fr

Exercie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$. Dans cet exercee. on pourra uiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n, ta fonction $x \longmapsto x^2 e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

1^o. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de $E, \langle P|Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$. On notera $\|.\|$ la norme euclidienne associe.

2^o. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.

3^o. Justifier que $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$ puis calculer le réel

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(x^2 - ax - b\right)^2 e^{-x} dx$$

Exercie II

Soit $p \in]0, 1[, q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(Y = k) = pq^k$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

4^o. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $P((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n, m < n$ et $m = n$.

5^o. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

6^o. **Un exemple**

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2, \Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

7^o. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux : Si $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\mathrm{Ker}[T(u)] = \mathrm{Ker}(P_1(u)) \oplus \mathrm{Ker}(P_2(u)) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(P_r(u))$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.
Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$).

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

8°. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal. On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1,2\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.
Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_{i\,i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$

9°. On pose alors pour tout entier $i \in \left\{1,2,\dots,m\right\}, p_i = R_j(u), Q_i(u)$. Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,\dots,m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

10°. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique **:** $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, N_i = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_j id_E\right)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_j.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

11°. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus \dots \oplus \mathrm{Im}\, p_m$.

12°. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, \mathrm{Im}\, p_i = N_j$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

13°. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u?

14°. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

15°. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

16°. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a/ Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.

b/ En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A.
On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c/ Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

17^o. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

18^o. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$.
Démontrer que la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$

19^o. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

20^o. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i$.
Nous allons étudier une « réciproque ».
Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^q f_i$.
Démontrer que u est diagonalisable.

FIN