El Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

Preparation Concours
Integrals à Paramètres

Thème : Fct d'Euler

Thème 1 Fct Gamma

pour tout $x > 0$ on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

1) Mq $\Gamma(x)$ est bien defini pour tout $x > 0$

2) Mq $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, puis que $\Gamma(n) = (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3) a) Calculer $\Gamma(1/2)$ Dndic $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

b) En deduire $\Gamma(n + 1/2)$ à l'aide de factorielle pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) Mq $x \mapsto \Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et donner $\Gamma^{(n)}(x)$ pour tout $x > 0$

5) Mq $\forall x > 0$ on a $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

Indic : thm de cvgce dominée

6) En deduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^x I_n(x)$

où $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$

(7) (i) Mq $I_n(x)$ cvge pour tout $x > 1$

(ii) Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$

(iii) On deduire une expression de $I_n(x)$

(7) Conclure que $\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}}$ formule de Gauss

(8) Retrouver ce resultat $\Gamma(m) = (m-1)!$ $\forall m \in \mathbb{N}^*$

indic

$$\binom{n+m}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^m}{m!\,(m-1)!}$$

Theme 2 / Fct Beta

Pour tout $x > 0$, $y > 0$ on pose

$$\boxed{B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

(1) Mq $B(x,y)$ est ~~defi~~ definie pour $x > 0$, $y > 0$

(2) Verifier que

$$\boxed{\begin{aligned} B(x,y) &= B(y,x) \\ B(x,y+1) &= \frac{y}{x} B(x+1,y) \\ B(x+1,y) &= \frac{x}{x+y} B(x,y) \\ B(x+1,y+1) &= \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} B(x,y) \end{aligned}}$$

(3)

3) i. Mq $I = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\, du$ est bien définie pour tout $x > 1$, $y > 1$

ii. Vérifier que $\beta(x,y) = I$

indic $t = \frac{u}{1+u}$

3) Mq $G(u) = \int_0^{u} e^{-t}\, t^{x+y-1}\, dt \leq \Gamma(x+y)$ pour tout $A > 0$

4) on pose $F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\, G((1+t)u)\, dt$

i. Mq F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

ii. Justifier que $\lim_{u \to +\infty} F(u) = \Gamma(x+y)\,\beta(x,y)$

iii. Mq F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

et que $F'(u) = u^{y-1} e^{-u}\, \Gamma(x)$

5) i. En déduire que $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pour tout $x > 1$, $y > 1$

ii. Dire pourquoi ce résultat est vrai pour tout $x > 0$, $y > 0$

6. **Une application**

que vaut $\int_0^1 t^n(1-t)^m \, dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$

7. **Une autre application**

Calculer $B(1/2, 1/2)$, en déduire $\Gamma(1/2)$ puis $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$

8. (i) Mq $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^y} \, dt$ cvge pour tout $x > -1$, $y > x+1$

(ii) Vérifier alors que $I = B(x+1, y-x-1)$

(iii) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{(1+t)^m} \, dt$ où $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ tq $m > n+1$

9. (i) Exprimer $\int_a^b (t-a)^x (b-t)^y \, dt$ à l'aide de $B(x, y)$

(ii) En déduire $\int_1^2 (t-1)^{1/2} (2-t)^{3/2} \, dt$

4

FIN

BONNE CHANCE