El Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

Preparation Concours
Integrals à Paramètre

Thème : Les transformations classiques

Thème 1 Transformé de Laplace

① On pose $L_0^1 = \{ f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tq $\exists A>0\ \exists a>0\ |f(t)| \leq A e^{-at^2}$ cont par morceaux $\}$

mq Alors que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\,dt$ cvge $\forall x \geq 0$

$|f(t)| \leq A e^{-at^2}$

pour tout $f \in L_0^1$ on pose et $x \geq 0$

$$\boxed{L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt}\,dt}$$

② Justifier que L_0^1 sev et $\forall f, g \in L_0^1$, on a $L(f+\lambda g)(x) = L(f)(x) + \lambda L(g)(x)$ $\forall x \geq 0$

③ Soit $f \in L_0^1$, mq $x \mapsto L(f)(x)$ est derivable

avec $L(f)'(x) = -L(g)(x)$ où $g(t) = t f(t)$

Dire pourquoi $x \mapsto L(f)(x)$ est de classe C^∞ et donner $L(f)^{(n)}(x)$ $\forall x \geq 0$

Scanné avec CamScanner

4) i) Soit $f \in \mathcal{L}_0^1$ tq $f' \in \mathcal{L}_0^1$

mq $\boxed{L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)}$

ii) On suppose de plus $f'' \in \mathcal{L}_0^1$

mq $\boxed{L(f'')(x) = x^2 L(f)(x) - x f(0) - f'(0)}$

5) Montrer les formules suivantes

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = x^n \Rightarrow L(f)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}} \\ f(x) = e^{zx} \Rightarrow L(f)(x) = \dfrac{1}{x-z} \\ (z \in \mathbb{C}) \\ f(x) = \cos(\omega x) \Rightarrow L(f)(x) = \dfrac{x}{x^2+\omega^2} \\ f(x) = \sin(\omega x) \Rightarrow L(f)(x) = \dfrac{\omega}{x^2+\omega^2} \end{array}}$$

6) On admet que l'app $f \mapsto L(f)$ est injective

Resoudre l'eq diff suivante

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 2\cos x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

7) thm des valeurs initiales : Soit $f \in \mathcal{L}_0^1$ mq

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} xL(f)(x) = f(0)}$$

8) thm des valeurs finales : Soit $f \in \mathcal{L}_0^1$ tq $f' \in \mathcal{L}_0^1$

et $\lim_{+\infty} f$ finie mq

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x\, L(f)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$$

Scanné avec CamScanner

Theme 2 / Transformé de Fourier

on pose $\mathcal{L}^1 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, C.M tq $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt$ cvge $\}$

et pour tout $f \in \mathcal{L}^1$ on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$

1) Mq $\mathcal{L}^1$ ev et que $\hat{f}(x)$ est bien défini $\forall f \in \mathcal{L}^1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) Verifier que $\widehat{f+\lambda g} = \hat{f} + \lambda \hat{g}$ $\forall f, g \in \mathcal{L}^1$

3) Mq si f est continue alors $\hat{f}$ est aussi continue

4) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé

i) on pose $f_a(t) = f(t+a)$. Mq $\hat{f_a}(x) = e^{iax}\hat{f}(x)$

ii) on pose ${}_af(t) = f(at)$. Mq $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ si $a \neq 0$

5) Donner l'expression de $\hat{f}(x)$ ds les cas suivants

i) f est paire

ii) f est impaire

iii) $f(t) = e^{iwt}$

iv) $f(t) = \cos wt$

v) $f(t) = \sin(wt)$

vi) $f(t) = t^7$

Scanné avec CamScanner

6) On suppose ici que $f, f' \in \mathcal{L}_0^1$

i) Mq $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

ii) Mq $\widehat{f'}(x) = i x \hat{f}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) En déduire que $\lim_{x \to \pm\infty} \hat{f}(x) = 0$

7) On suppose ici que $f, g \in \mathcal{L}_0^1$ où $g(t) = t f(t)$

Mq $\hat{f}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $(\hat{f})'(x) = -i \hat{g}(x)$

8) <u>Un exemple de calcul</u>

On pose $f(t) = e^{-t^2}$, $g(t) = e^{-at^2}$ $a > 0$

i) Justifier que $f, g \in \mathcal{L}_0^1$

ii) Vérifier que $\hat{f}$ est sol de l'eq diff $y'(x) + \frac{x}{2} y(x) = 0$

iii) En déduire $\hat{f}(x)$ et $\hat{g}(x)$

<u>indic</u> : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Scanné avec CamScanner

Theme 3 — Produit de Convolution — CNC 2024

① Avec les notations du theme I et II

Mq $\mathcal{L}_0^1 \subset \mathcal{L}^1$

pour tout $f, g \in \mathcal{L}_0^1$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt}$$

② Mq $(f * g)(x)$ est bien defini

③ Verifier que $(f * g)(x) = (g * f)(x)$

④ Mq $f * g \in \mathcal{L}_0^1 \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_0^1$ **(Admis, voir CNC 2024)**

⑤ Mq $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)\, dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx\right) \quad \forall f, g \in \mathcal{L}_0$

indic : utiliser ce resultat admis thm de Fubini

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dx\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, dy\right) dx$$

⑥ En deduire que $L(f * g) = L(f) \cdot L(g)$ **(si f(t)=g(t)=0 pour t<0)**

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Scanné avec CamScanner