El Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

PREPARATION CONCOURS

Eq diff et Series Entières

Thème 1 : Exemple de calcul de DSE et applications

Partie I / un exple de DSE

1) Dire pourquoi $f(x) = \arccos x$ est DSE sur $]-1,1[$

2) i) Donner le DSE de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$

ii) En deduire celui de $\arccos x$

3) i) Verifier que $y(x) = \arccos x$ est sol de l'eq diff $(1-x^2)y''(x)$ [redacted] $x y'(x) = 0$

ii) En deduire autrement le DSE de $\arccos(x)$

4) i) Donner le DSE de $x \mapsto \arcsin x$ sur $]-1,1[$

ii) En deduire $\forall x \in [0, \pi/2[$ on a $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$

iii) En deduire que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$

indic Wallis : $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ + $\int \sum = \sum \int$

1)

(5) (i) calculer $I_n = \int_0^1 x^n \ln x \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) Mq $I = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} \, dx$ =3/4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$.3/4

(iii) Mq $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} \, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$

puis que $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1} \quad \forall x \in]0,1[$

(iv) En deduire que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Partie II / Eq diff de Bessel

Soit $\lambda > 0$ on considère l'eq diff

$$\boxed{(E_\lambda) : x^2 y''(x) + x y'(x) - (1+\lambda^2) y(x) = 0}$$

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}$ sol de (E_λ) tq $a_0 \neq 0$

(i) Mq
$$\boxed{\begin{array}{ll} \alpha^2 = \lambda^2 & \\ \left((\alpha+1)^2 - \lambda^2\right) a_1 = 0 & \\ \left((\alpha+n)^2 - \lambda^2\right) a_n = a_{n-1} & \forall n \geq 2 \end{array}}$$

(ii) En deduire que $a_{2k+1} = 0$ $\forall k$

(iii) Verifier que $a_{2n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{2n} n! \, \Gamma(\alpha+n+1)}$

où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

verifie $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$

On suppose ici $\alpha = \lambda$

(iii) En deduire $R_\alpha = ?$ (rayon de cvgce de $\sum a_n x^n$)

② On suppose $a_0 = \dfrac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$

ⓐ Mq $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n+\lambda}$

ⓘⓘ En deduire $y_\lambda(x) \underset{0}{\sim}$?

Partie III Resolution complète d'éq diff de second degré

1) on considere l'eq (EH) : $\boxed{(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0}$

(i) Donner un syst fondamental de (EH) en cherchant des solutions particulières DSE de de EH

(ii) En deduire la forme gle des solutions de (EH)

2) on considère (E) : $\boxed{(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = \dfrac{x}{1+x^2}}$

(i) En deduire une sol particuliere de (E)

(ii) Donner la forme gle des sol de (E)

3) on considere (EH) : $\boxed{xy'' + (x-1)y' - y = 0}$

(i) Donner une solution particuliere y_1 DSE de (EH)

(ii) En deduire une autre sol particuliere de (EH) de la forme $y_2(x) = \lambda(x)\, y_1(x)$

(iii) Verifier que $\{y_1, y_2\}$ est un syst fond de (EH)

(iv) En deduire la forme gle de sol de (E)

où (E) : $\boxed{xy'' + (x-1)y' - y = x e^{-x}}$

Thème 2 : Comportement aux bords

Exercice 1 Règle des équivalents

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$.
On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$.
On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.
2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.
3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.
4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que

$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.
5. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 2 Théorèmes de Tauber -1

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente?
2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 3 - Théorème d'Abel

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Thème 3 : Application des DSE au dénombrement

Exercice 1 - Nombre de dérangements

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 - Nombre d'involutions

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

FiN