My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries Entières

Thème 1 : Rayon de convergence

Exercice 1 - Rayon de convergence sans règles

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. la suite (a_n) tend vers $\ell \neq 0$;
2. la suite (a_n) est périodique, et non identiquement nulle;
3. a_n est le nombre de diviseurs de n;
4. a_n est la $n-$ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 2 - Division par n!

1. Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$. Montrer que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
2. On suppose maintenant que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a pour rayon de convergence $\rho > 0$. Que dire du rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$?

Exercice 3 - Puissance

Soit $\sum_n a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty]$, telle que $a_n > 0$ pour tout entier n et soit $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$?

Exercice 4 - Produit de Hadamard

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif ρ_1 et ρ_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq \rho_1 \rho_2$. A-t-on toujours égalité?

Exercice 5 - Comparaison de rayon de convergence

Soit R le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$. Comparer R avec les rayons de convergence des séries entières de terme général :

1. $a_n e^{\sqrt{n}} z^n$ **2.** $a_n z^{2n}$ **3.** $a_n z^{n^2}$.

Exercice 6 - Somme partielle

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Soit $S_n = a_0 + \cdots + a_n$ et soit R le rayon de convergence de la série $\sum_n S_n z^n$.

1. Montrer que $R \leq \rho$.
2. Montrer que $\inf(1, \rho) \leq R$.

Thème 2 : Comportement aux bords

Exercice 1 Règle des équivalents

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels positifs. On note R et R' les rayons de convergence respectifs des series entières $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$. Soient $f : x \mapsto \sum_n a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_n b_n x^n$.

On suppose enfin qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

1. Montrer que $R \geq R'$.

On suppose désormais que $R' = 1$ et que la série $\sum_n b_n$ est divergente.

2. Soit $M > 0$. Montrer qu'il existe un entier $N \geq 0$ et un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, alors $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \geq M$.

3. En déduire que $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to 1$.

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $(l-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq N$. Montrer que

$$f(x) = P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

où P est un polynôme, et $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ pour tout $n \geq 0$.

5. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exercice 2 Théorèmes de Tauber -1

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite.

1. La série $\sum_n a_n$ est-elle nécessairement convergente?

2. On suppose désormais que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n\geq 0} a_n$.

Exercice 3 - Théorème d'Abel

Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum_n a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum_n a_n$ converge et on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \geq 1$, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. En déduire que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Exercice 4 - Théorème de Tauber - 2

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose de plus que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1^- et on note ℓ cette limite. On suppose enfin que $a_n=o(1/n)$.
Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1[$, on note

$$A(x)=S(x)-\ell,\ B_N(x)=\sum_{n=0}^N(1-x^n)a_n,\ C_N(x)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n.$$

1. Vérifier que $\sum_{n=0}^N a_n-\ell=A(x)+B_N(x)-C_N(x)$.
2. Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe un entier N_0 tel que, pour tout $N\geq N_0$,

$$|C_N(x)|\leq\frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Thème 3 : Développements en séries entières (DSE)

Exercice 1 - Développement en série entière d'une racine carrée

Déterminer le développement en série entière de $x\mapsto\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 2 - DSE d'une fraction rationnelle

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 3 - Une fonction C^∞ non développable en série entière

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}e^{n^2ix}$.

1. Justifier que f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour chaque $k\geq 1$, $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\geq k^ke^{-k}$.
3. En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 4 - Fonction définie par une série

Pour $x>-1$, on pose $u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Démontrer que u est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 5 - Une condition suffisante pour l'existence d'un développement en série entière

Soit $a>0$ et $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C,A>0$ vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\|_\infty\leq C\cdot A^n\cdot n!$
(on a noté $\|g\|_\infty=\sup_{x\in[-a,a]}|g(x)|$). Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 6 - Théorème de Bernstein

Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0 telle que f, et toutes ses dérivées, sont positives sur I. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$. On veut prouver dans cet exercice que f est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du.$$

On pose alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$.

2. Démontrer que, si $|x| < \alpha$, alors $|R_n(x)| \leq |x/\alpha|^{n+1} R_n(\alpha)$.
3. Conclure.

Exercice 7 - Inverse d'une fonction développable en série entière

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence strictement positif. On suppose de plus que $a_0 \neq 0$. Le but est de prouver que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de zéro.

1. On suppose que $1/f = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, avec rayon de convergence strictement positif. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (b_n)?
2. Soit (b_n) la suite définie par la relation de récurrence précédente.
   - **2.1.** Justifier qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $|a_n| \leq R^n$ pour tout $n \geq 1$.
   - **2.2.** Justifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} \leq |a_0|.$$

   - **2.3.** Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

   - **2.4.** Que peut-on en déduire sur la série $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.
3. En déduire que $1/f$ est développable en série entière.

Thème 4 : Calcul de sommes

Exercice 1

On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle a priori continue? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 2

On se propose dans cet exercice de calculer $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(3n)!}$. Pour cela, on introduit

$$S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Méthode 1. On note $j=e^{2i\pi/3}$.
   1.1. Calculer $1+j^k+j^{2k}$ pour tout entier $k\in\mathbb{N}$. En déduire le développement en série entière de $e^x+e^{jx}+e^{j^2x}$.
   1.2. En déduire $S(x)$, puis la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(3n)!}$.
2. Méthode 2.
   2.1. Former une équation différentielle du troisième ordre vérifiée par S.
   2.2. La résoudre.
   2.3. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(3n)!}$.

Thème 5 : Usage des équations différentielles

Exercice 1

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(t)=\cos(\alpha\arcsin t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et donner son développement.

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\exp(\lambda\arcsin x)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Former une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.
2. Chercher les solutions de l'équation différentielle obtenue qui sont développables en série entière et vérifient $y(0)=1$ et $y'(0)=\lambda$.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Étudier la parité de f.
2. Justifier que f est développable en série entière.
3. En formant une équation différentielle vérifiée par f, déterminer ce développement.

Thème 6 : Usage du dénombrement

Exercice 1 - Nombre de dérangements

Pour tous les entiers k et n tels que $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de bijections (ou permutations) s de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ayant k points fixes, c'est-à-dire telles que

On pose $D_{0,0} = 1$ et $d_n = D_{n,0}$. d_n désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}$.
4. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
5. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $(\exp x) f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.
6. En déduire que $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
7. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 - Nombre d'involutions

On rappelle qu'une involution de $\{1, \ldots, n\}$ est une application $s : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que $s \circ s(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1, \ldots, n\}$ et on convient que $I_0 = 1$.

1. Démontrer que, si $n \geq 1$, alors
$$I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}.$$
2. Démontrer que la série entière $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge pour tout x dans $]-1, 1[$. On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1 + x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

FiN

Corrigé

Thème 1 : Rayon de convergence

Exercice 1 -

1. Puisque la suite (a_n) est convergente, elle est bornée et donc la suite $(a_n 1^n)$ est bornée. Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à 1. De plus, au voisinage de l'infini, on a $a_n r^n \sim \ell r^n$. Si $r > 1$, ceci tend vers $\pm\infty$, suivant le signe de ℓ. Le rayon de convergence de la série entière est donc exactement égal à 1.
2. Puisque la suite (a_n) est périodique, elle est bornée et un raisonnement identique à celui de la question précédente donne que le rayon de convergence est au moins égal à 1. De plus, puisque la suite (a_n) est périodique et non identiquement nulle, elle ne converge par vers 0. Ainsi, la série $\sum_n a_n 1^n$ est divergente. Le rayon de convergence vaut donc 1.
3. Il suffit de remarquer que $1 \leq a_n \leq n$, ce qui entraine

$$|x|^n \leq |a_n x^n| \leq n|x|^n.$$

Ainsi, pour $|x| < 1$, la série $\sum_n a_n x^n$ converge, et pour $|x| > 1$, elle diverge. Son rayon de convergence est donc égal à 1.
4. La suite (a_n) est une suite qui prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 9\}$ donc elle est bornée. Puisque $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre décimal, (a_n) prend une infinité de fois une valeur dans $\{1, \dots, 9\}$. En particulier, (a_n) ne tend pas vers 0. Raisonnant comme ci-dessus, on trouve que le rayon de convergence vaut exactement 1.

Exercice 2 -

1. Soit $0 < r < \rho$. Par la définition du rayon de convergence, on sait que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$|a_n r^n| \leq M.$$

Soit maintenant $R > 0$. Alors on a $\dfrac{|a_n| R^n}{n!} = |a_n| r^n \times \dfrac{(R/r)^n}{n!}$.

Par croissance comparée des suites puissances et factorielle, il existe $C > 0$ tel que $|(R/r)^n|/n! \leq C$. Il vient, pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{|a_n| R^n}{n!} \leq MC.$$

La suite $(a_n R^n/n!)$ est bornée pour tout $R > 0$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.
2. D'après la première question, si $\sum_n a_n r^n$ converge pour un certain réel r, donc dès que le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ est strictement positif (il peut être éventuellement égal à $+\infty$), alors le rayon de convergence de $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ est égal à $+\infty$. Par contraposée, si on suppose que $\sum_n \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence $\rho \in [0, +\infty[$, alors $\sum_n a_n x^n$ a un rayon de convergence nul.

Exercice 3 -

Il suffit de remarquer que la suite $(a_n^\alpha r^n)$ est bornée si et seulement la suite $(a_n r^{n/\alpha})$ (obtenue en prenant la puissance $1/\alpha$ de la première) est bornée. Ainsi, si $r < \rho^\alpha$, alors $r^{1/\alpha} < \rho$ et donc les suites $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ sont bornées. De même, si $r > \rho^\alpha$, de sorte que $r^{1/\alpha} > \rho$, alors les suite $(a_n r^{n/\alpha})$ et $(a_n^\alpha r^n)$ ne sont pas bornées. Ceci prouve que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n^\alpha x^n$ est égal à ρ^α.

Exercice 4 -

Soit $0 \leq r < \rho_1\rho_2$. Alors il existe $r_1 < \rho_1$ et $r_2 < \rho_2$ tel que $r = r_1r_2$. Les suites $(a_n r_1^n)$ et $(b_n r_2^n)$ sont bornées. Il en est de même de la suite $(a_n b_n r_1^n r_2^n)$, c'est-à-dire de la suite $(a_n b_n r^n)$. Comme ceci est vrai pour tout $r < \rho_1\rho_2$, le rayon de convergence recherché est au moins égal à $\rho_1\rho_2$. On n'a pas toujours égalité. En effet, si la première série est $\sum_n z^{2n}$ et la deuxième série est $\sum_n z^{2n+1}$, alors leur produit de Hadamard est la série nulle, qui est de rayon de convergence égal à $+\infty$, alors que dans ce cas $\rho_1\rho_2 = 1 \times 1 = 1$.

Exercice 5 -

1. Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_n a_n e^{\sqrt{n}} z^n$. Puisque $|a_n| e^{\sqrt{n}} \geq |a_n|$, on a $R_1 \leq R$. Soit maintenant $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée. Alors, pour tout $\rho \in [0, r[$, on a

$$a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n = a_n r^n e^{\sqrt{n}} \frac{\rho^n}{r^n} = a_n r^n e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$$

et comme $e^{n \ln(\rho/r) + \sqrt{n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, car $\ln(\rho/r) < 0$, la suite $(a_n e^{\sqrt{n}} \rho^n)$ est bornée. On en déduit que $R \leq R_1$ et donc finalement que $R = R_1$.

2. Il est clair que $(a_n r^{2n})$ est bornée si et seulement si $(a_n (r^2)^n)$ est bornée (c'est la même suite écrire de deux façons différentes). Le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{2n}$ est donc égal à $\sqrt{R}$.

3. Supposons d'abord $R > 0$ et $R < +\infty$. On va alors prouver que le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1. En effet, soit r tel que $(a_n r^n)$ est bornée. Alors, pour tout $\rho < 1$, on a $a_n \rho^{n^2} = a_n r^n \times \frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ et cette quantité est bornée car $\frac{\rho^{n^2}}{r^n}$ tend vers (on a choisi $\rho < 1$). Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est supérieur ou égal à De façon similaire, on prouve que, si r est tel que $a_n r^n$ n'est pas bornée, alors pour tout $\rho > 1$, on a $a_n \rho^{n^2}$ qui n'est pas borné. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ est égal à 1.

Lorsque $R = +\infty$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ sera élément de $[1, +\infty]$, mais toutes les valeurs peuvent être prises :

- Si $a_n = 1/n!$, alors le rayon vaut 1.
- Si $a_n = 1/n^{n^2}$, alors le rayon vaut $+\infty$.
- Si $a_n = 1/\lambda^{n^2}$, avec $\lambda > 1$, le rayon de convergence vaut λ.

De même, si $R = 0$, alors le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{n^2}$ peut être n'importe quel réel dans $[0, 1]$.

Exercice 6 -

1. Remarquons que $a_n = S_n - S_{n-1}$ et donc que $\sum_n a_n z^n = \sum_n S_n z^n - \sum_n S_{n-1} z^n$. Ainsi, $\sum_n a_n z^n$ est la différence de deux séries entières de rayon de convergence R, son rayon de convergence ρ vérifie $\rho \geq R$.

2. La série $\sum_n S_n z^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n z^n$. Ces deux séries ont pour rayon de convergence respectif ρ et 1. On en déduit que le rayon de convergence R de la série $\sum_n S_n z^n$ vérifie $R \geq \inf(1, \rho)$.

Thème 2 : Comportement aux bords

Exercice 1

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n| \leq (l+1)|b_n|$.
Soit maintenant $r > 0$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, on a $|a_n|r^n \leq (l+1)|b_n|r^n$
et donc, si la suite $(|b_n|r^n)$ est bornée, la suite $(|a_n|r^n)$ l'est aussi. On conclut en utilisant la définition du rayon de convergence. Le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$ étant en effet donné par

$$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n|r^n) \text{ est bornée }\}.$$

2. Fixons $N \geq 1$ tel que $\sum_{n=0}^N b_n \geq 2M$. Posons ensuite $P(x) = \sum_{n=0}^N b_n x^n$. On a $P(1) = 2M > M$. Le résultat demandé est alors une conséquence immédiate de la continuité de P en 1.

3. Soit $M > 0$ et soient N, δ donnés par la question précédente. Alors, puisque b_n est positif pour tout n, on a, pour chaque $x \in]0,1[$, $g(x) \geq \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$.

En particulier, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a $g(x) \geq M$.

Ceci prouve bien que g tend vers $+\infty$ en 1.

4. On écrit simplement que
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (a_n - lb_n)x^n + \sum_{n=0}^{N} lb_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n \\ &= P(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

où on a posé $P(x) = \sum_{n=0}^N (a_n - lb_n)x^n$ et $c_n = lb_n$ si $n \leq N$, $c_n = a_n$ sinon.

5. On fixe $\varepsilon > 0$ et on décompose f comme précédemment. D'une part, on a $(l-\varepsilon)b_n \leq c_n \leq (l+\varepsilon)b_n$ et donc, multipliant par x^n et sommant pour $n = 0, \dots, +\infty$,

on déduit que
$$(l-\varepsilon)g(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \leq (l+\varepsilon)g(x).$$

D'autre part, puisque P est un polynôme, donc est continu en 1, et que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$, on sait que $\dfrac{P(x)}{g(x)} \to 0 \text{ quand } x \to 1.$

On en déduit l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$-\varepsilon \leq \frac{P(x)}{g(x)} \leq +\varepsilon.$$

Finalement, sommant toutes ces inégalités, on trouve que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$l - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq l + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que f/g tend vers l en 1.

Exercice 2

1. Pour $a_n = (-1)^n$, on a $S(x) = \frac{1}{1+x}$ qui tend vers $1/2$ si x tend vers 1^-, alors que la série $\sum_n a_n$ diverge.

2. Remarquons d'abord que S est croissante (puisque chaque $x \mapsto a_n x^n$ est croissante). Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a $S(x) \leq \ell$. Mais alors, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, on a encore

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq \ell.$$

Si on fait tendre x vers 1^-, on obtient que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \ell.$

Les sommes partielles de la série $\sum_n a_n$, qui est à termes positifs, sont majorées, et donc la série est convergente. De plus, on a par le passage à la limite précédent $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \ell$. Fixons ensuite $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1[$ tel que $S(x) \geq \ell - \varepsilon$. Il vient,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \geq \ell - \varepsilon.$$

Ceci prouve le résultat demandé.

Exercice 3

1. On commence par couper la somme en n et par remarquer que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k - R_n.$$

La clé ici est d'écrire dans la deuxième somme $a_k = R_{k-1} - R_k$ (et d'effectuer ce qu'on appelle une transformation d'Abel). Pour $m \geq n+1$, il vient

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n+1}^{m-1} R_k(x^{k+1} - x^k) + R_n x^{n+1} - R_m x^m.$$

Puisque (R_p) tend vers 0, on peut faire tendre m vers ∞ et on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n x^{n+1},$$

ce qui donne bien $\displaystyle f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$

2. On va d'abord fixer n pour que la deuxième somme soit petite, indépendamment de x dans $[0,1[$, puis on va faire tendre x vers 1. Soit donc $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq n$, on a $|R_k| \leq \varepsilon$. On en déduit, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\left|(x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k\right| \leq \varepsilon |x-1| \times \sum_{k=N+1}^{+\infty} x^k \leq \varepsilon.$$

On a de plus, toujours pour cette valeur de n, $\left|R_n(x^{n+1} - 1)\right| \leq 2\varepsilon.$

Cette valeur de n étant fixée, la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)$ est continue en 1, de limite nulle. Ainsi, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1)\right| \leq \varepsilon.$$

Finalement, en mettant tous les résultats ensembles, on trouve qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, on a

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leq 4\varepsilon.$$

Ceci est exactement le résultat voulu.

Exercice 4

1. Il s'agit d'une simple vérification algébrique.
2. Soit N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$, $|a_n| \leq \varepsilon/n$. Pour $N \geq N_0$, il vient

$$|C_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{n} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n \geq N+1} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$

3. Le résultat de la question précédente nous incite à choisir $x = 1 - \frac{1}{N}$, de sorte à avoir une grande valeur de x qui garantisse néanmoins que $|C_N(x)| \leq \varepsilon$. Majorons ensuite les

autres termes. Pour $A(x)$, c'est facile. Il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$,

$$|A(x)| = \left| S\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto t^n$, on a

$$|1 - x^n| \leq n(1-x) \leq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$|B_N(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n|.$$

D'après le théorème de Cesaro, puisque (na_n) tend vers 0, on sait que $|B_N(x)|$ tend vers 0, et donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_2$,

$$|B_N(x)| \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $N \geq \max(N_0, N_1, N_2)$, on trouve

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - \ell \right| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_n a_n$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Thème 3 : Développements en séries entières (DSE)

Exercice 1

Notons f la fonction considérée. On pourrait écrire $f(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^{-1/2}$ et réaliser le produit de Cauchy de ces deux développements. Il y a plus astucieux et beaucoup plus simple si on pense à écrire (attention aux exposants!)

$$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

En écrivant le développement de $(1+u)^\alpha$ avec $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$, il vient

$$(1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}.$$

On conclut que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(x^{2n} + x^{2n+1}\right).$$

On vérifie que le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

Exercice 2

On décompose f en éléments simples. Puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{2x-1}.$$

Si on multiplie les deux membres par $2x-1$ et qu'on fait $x = 1/2$, on trouve $c = \frac{1/4+1/2-3}{9/4} = -1$. De même, multipliant par $(x-2)^2$, on trouve $b = 1$. Pour trouver a, on peut procéder par identification et on obtient $a = 1$. On développe en série entière chaque terme :

- Pour $x \neq 2$, $\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2-x} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-x/2}$.

  Donc, pour $|x|/2 < 1$, on a $\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2} \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} x^n.$
- Le troisième terme se traite de la même façon. Pour $|x| < 1/2$, on a

$$\frac{-1}{2x-1} = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n.$$

- Pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que $\frac{1}{(x-2)^2}$ est la dérivée de $\frac{-1}{x-2}$. Ayant déjà obtenu le développement en série entière de cette fraction rationnelle, il suffit de le dériver terme à terme. On obtient donc :

$$\frac{1}{(x-2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} x^n.$$

On obtient donc que, pour tout $x \in]-1/2, 1/2[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} + 2^n \right) x^n.$$

La série entière obtenue est de rayon de convergence 1/2.

Exercice 3

1. Posons pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = e^{-n}e^{n^2 ix}$. Alors u_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 0$, on a

$$u_n^{(k)}(x) = (in^2)^k e^{-n} e^{n^2 ix}.$$

Puisque $n^{2k}e^{-n} = O(n^{-2})$, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|u_n^{(k)}(x)| \leq Mn^{-2}.$$

La série (numérique) qui apparait à droite est convergente, on en déduit que la série des dérivées k-ièmes $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \geq 0$. Ainsi, $f = \sum_n u_n$ est de classe C^∞.

2. D'après le calcul précédent, on a

$$|f^{(k)}(0)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} i^k n^{2k} e^{-n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}e^{-n} \geq k^{2k}e^{-k}.$$

Or, $k^k \geq k!$, et donc $$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq \frac{k^k}{k!} k^k e^{-k} \geq k^k e^{-k}.$$

3. Si la fonction était développable en série entière en 0, il existerait un intervalle non-vide I centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, f serait somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, on aurait

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Mais pour $x \neq 0$, cette série ne converge pas car son terme général ne tend pas vers 0. En effet,

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \geq k^k (x/e)^k \to +\infty$$

Ainsi, f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 4

On va démontrer que u est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-1, 1[$. Dans toute la suite, on va donc supposer $|x| < 1$.
Méthode 1 : On sait, que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{x+n} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{n^k}.$$

Ainsi, $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(-1)^k x^k}{n^{k+1}}.$$

Imaginons que l'on puisse permuter les deux sommes. Alors on obtient

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{k+1}}\right) x^k$$

ce qui prouve que u est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Reste à justifier la permutation deux deux séries. Pour cela, il suffit de prouver que la famille $\left(\frac{(-1)^n(-1)^k x^k}{n^{k+1}}\right)_{n\geq 1,\, k\geq 0}$ est sommable. Malheureusement, ce n'est pas le cas, car

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^k}{n^{k+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{n^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n-x}$$

et cette dernière série est divergente. Il faut donc un peu ruser. En effet, la famille va devenir sommable si on exclut $k=0$ puisque

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{n^{k+1}}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{n^k}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{|x|/n}{1-\frac{|x|}{n}}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|x|}{n^2-n|x|}\end{aligned}$$

et cette dernière série est convergente. En sortant le terme $k=0$ de la somme (c'est possible puisqu'il n'y a qu'un seul terme), on a donc justifié qu'on pouvait permuter les deux sommes.
Méthode 2 : On utilise que $\frac{1}{x+n}=\int_0^1 t^{x+n-1}dx$. On a donc :

$$u(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 t^{x+n-1}dt.$$

On va permuter la série et l'intégrale. Pour cela, on pose

$$f_N(t)=\sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{x+n-1}.$$

Alors :

- $f_N(t)$ converge simplement vers $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n t^{n-1}t^x=\frac{-t^x}{1+t}=f(t)$.
- $|f_N(t)|\leq t^x$ (car la valeur absolue de la somme partielle d'une série alternée est majorée par la valeur absolue du premier terme), la fonction t^x étant intégrable sur $]0,1[$ pour $|x|<1$.

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$u(x)=-\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt.$$

On développe ensuite $t^x=\exp(x\ln t)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\frac{(\ln t)^n}{n!}$. On a donc :

$$u(x)=-\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}x^n\right)dt.$$

On permute, mais en sens contraire, l'intégrale et la série. Pour cela, on pose

$$g_N(t)=\sum_{n=0}^{N}\frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)}x^n.$$

- g_N converge simplement vers $\frac{t^x}{1+t}$.
- On a la majoration suivante :

$$\begin{aligned}|g_N(t)| \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n!(1+t)} &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\ln t|^n |x|^n}{n!(1+t)} \\ &\leq \frac{1}{1+t} \exp(|x||\ln t|) \\ &\leq \frac{1}{(1+t)t^{|x|}}\end{aligned}$$

et cette fonction est intégrable sur $]0,1[$ si $|x|<1$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et permuter la série et l'intégrale :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{n!(1+t)} dt \right) x^n$$

expression valable pour $|x|<1$. u est donc développable en série entière au voisinage de 0.

Prenons $x \in [-a,a]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \leq C|xA|^{n+1}.$$

Soit $r = \min(a, 1/A)$. Alors si $|x|<r$, on a $|xA|<1$ et donc $|xA|^{n+1} \to 0$. On en déduit que la série de Taylor de f converge vers f sur l'intervalle $]-r,r[$, et donc f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 5

Prenons $x \in [-a,a]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \leq C|xA|^{n+1}.$$

Soit $r = \min(a, 1/A)$. Alors si $|x|<r$, on a $|xA|<1$ et donc $|xA|^{n+1} \to 0$. On en déduit que la série de Taylor de f converge vers f sur l'intervalle $]-r,r[$, et donc f est développable en série entière sur cet intervalle.

Exercice 6

1. Il s'agit simplement de la formule de Taylor avec reste intégral, après changement de variables.
2. On sait que $f^{(n+1)}$ est croissante sur I puisque $f^{(n+2)} \geq 0$. On en déduit que, pour tout $u \in [0,1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(\alpha u)$. Par intégration, on en déduit immédiatement le résultat demandé.
3. Il s'agit de démontrer que $R_n(x)$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, il suffit de démontrer que la suite $(R_n(\alpha))$ est bornée. Mais, en reprenant le résultat de la première question pour $x=\alpha$, et en observant que tous les termes apparaissant dans la somme sont positifs, on trouve que $R_n(\alpha) \leq f(\alpha)$. Et donc $(R_n(x))$ tend bien vers 0.

Exercice 7

1. D'après la formule du produit de Cauchy, on a

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 1$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. La suite (b_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$\begin{cases} b_0 & = & \frac{1}{a_0} \\ b_n & = & \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \end{cases}$$

2.

2.1. Puisque $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif, il existe $\rho > 0$ et $A > 0$ tel que $|a_n| \leq A\rho^n$ pour tout $n \geq 0$. Il suffit alors de choisir $R = \max(A\rho, \rho)$.

2.2. On sait que, si $C > R$,

$$\sum_{k\geq 1} \frac{R^k}{C^k} = \frac{\frac{R}{C}}{1 - \frac{R}{C}}.$$

Si C tend vers $+\infty$, ceci tend vers 0.

2.3. On va prouver par récurrence sur n que $|b_n| \leq \frac{C^n}{|a_0|}$. C'est vrai au rang 0, et si c'est vrai jusqu'au rang $n-1$, alors

$$|b_n| \leq \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^n \frac{R^k}{C^k} \frac{C^n}{|a_0|} \leq \frac{C^n}{|a_0|} \times \frac{1}{|a_0|} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R^k}{C^k} \leq \frac{C^n}{|a_0|}.$$

2.4. La série entière $\sum_n b_n z^n$ est donc de rayon de convergence non nul.

3. Soit $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Alors, par la formule sur le produit de Cauchy de deux séries entières et par définition de (b_n), on a $f(z)g(z) = 1$ dans un voisinage de 0. Autrement dit, $g = 1/f$ dans un voisinage de 0. $1/f$ est donc développable en série entière en 0.

1. On dérive deux fois f :

$$f(x) = \exp(\lambda \arcsin x)$$
$$f'(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x)$$
$$f''(x) = \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x).$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

Thème 4 : Calcul de sommes

Exercice 1

1. Posons $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. Alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} \to |x|^2$. Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour $x = 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour $x = -1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ est convergente. f est donc définie sur $[-1, 1]$.

2. La théorie des séries entières nous dit que f est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$. Pour prouver la continuité sur $[-1, 1]$, on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle $[-1, 1]$. En effet, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$$

et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x). La série est donc normalement convergente sur $[-1, 1]$. Comme chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que f est continue sur $[-1, 1]$.

3. La série dérivée est, pour $|x| < 1$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1 + x^2).$$

En effet, pour $x \in]-1, 1[$, on a $0 \leq x^2 < 1$ et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de $\ln(1 + u)$. Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt$. On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1 + t^2)dt \\
&= \left[t\ln(1 + t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1 + t^2}dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2[t - \arctan(t)]_0^x \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x.
\end{aligned}$$

4. L'égalité $f(x) = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x$ n'est valable que pour $x \in]-1, 1[$. Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur $[0, 1]$ tout entier. On conclut que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2

1.

1.1. Il est facile de vérifier que $1+j+j^2=0$, que $1+j^2+j^4=0$ et que $j^3=1$. On en déduit que

$$1+j^k+j^{2k}=1+j^r+j^{2r}$$

où r est le reste de k modulo 3. On en déduit que $1+j^k+j^{2k}=0$ sauf si k est multiple de 3. Dans ce cas, la somme vaut 3. Il vient alors

$$e^x+e^{jx}+e^{j^2x}=\sum_{k\geq 0}\frac{1+j^k+j^{2k}}{k!}x^k=3\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1.2. Écrivant

$$e^{jx}=\exp\big((-1+i\sqrt{3})x/2\big)=e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2)+i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$

et $$e^{j^2x}=\exp\big((-1-i\sqrt{3})x/2\big)=e^{-x/2}\big(\cos(x\sqrt{3}/2)-i\sin(x\sqrt{3}/2)\big)$$

on en déduit $$S(x)=\frac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}.$$

La somme recherchée est donc $$S(1)=\frac{e+2e^{-1/2}\cos(\sqrt{3}/2)}{3}.$$

2.

2.1. On a $$S'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$$

$$S''(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$$

$$S^{(3)}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!}=\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=S(x).$$

Ainsi, S est solution de l'équation $y^{(3)}-y=0$.

2.2. L'équation précédente est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^3-1=0$, qui admet pour racines $1, j, j^2$. Toute solution s'écrit donc $y(x)=ae^x+be^{jx}+ce^{j^2x}$.

2.3. S est la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant $S(0)=1$, $S'(0)=S''(0)=0$. On obtient le système

$$\begin{cases} a+b+c &= 1\\ a+bj+cj^2 &= 0\\ a+bj^2+cj &= 0\end{cases}$$

d'où on tire $a=b=c=1/3$. On a donc

$$S(x)=\frac{1}{3}\left(e^x+e^{jx}+e^{j^2x}\right)=\frac{e^x}{3}+\frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right).$$

Thème 5 : Usage des équations différentielles

Exercice 2

1. On dérive deux fois f :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(\lambda \arcsin x) \\
f'(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \exp(\lambda \arcsin x) \\
f''(x) &= \frac{\lambda x}{(1-x^2)^{3/2}} \exp(\lambda \arcsin x) + \frac{\lambda^2}{1-x^2} \exp(\lambda \arcsin x).
\end{aligned}$$

On trouve que f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. y' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ et y'' est somme de $\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$. La fonction $x \mapsto (1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y$ est donc somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \big((n+1)(n+2)a_{n+2} + (-n(n-1) - n - \lambda^2)a_n\big)x^n.$$

Ceci doit être identiquement nul sur $]-R, R[$. Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + \lambda^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

De plus, $a_0 = 1$ (car $y(0) = 1$) et $a_1 = y'(0) = \lambda$. On trouve ainsi une unique suite (a_n) solution. On peut calculer expliciter a_n, en distinguant les termes pairs et les termes impairs (le calcul est laissé au lecteur). Réciproquement, la suite (a_n) précédente définit une série entière de rayon de convergence 1 d'après le critère de d'Alembert (puisque $a_{n+2}/a_n \to 1$). Cette série entière est, en remontant les calculs, solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales voulues.

3. L'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' - \lambda^2 y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, et $1 - x^2 \neq 0$ sur $]-1, 1[$. Il existe donc une unique solution à cette équation définie sur $]-1, 1[$ et vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = \lambda$. f et la série entière trouvée à la question précédente conviennent. On en déduit qu'elles sont égales. Autrement dit, f est développable en série entière, et $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

Exercice 2

1. La fonction $x \mapsto e^{x^2/2}$ est paire. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$ est impaire (faire le changement de variables $u = -t$ dans l'intégrale). Donc f est impaire.

2. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est développable en série entière, de rayon de convergence $+\infty$. Toute primitive d'une fonction développable en série entière de rayon de convergence infini vérifie la même propriété. C'est en particulier le cas de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$. Par produit, f est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$.

3. Par dérivation d'un produit, on a

$$f'(x) = xe^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt + 1 = xf(x) + 1.$$

f est donc solution de l'équation différentielle $y' = xy + 1$. Écrivons ensuite $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$ le développement en série entière de f (on sait qu'il a cette forme puisque f est impaire). Introduisant ce développement en série entière dans l'équation différentielle (et utilisant l'unicité d'un développement en série entière), on trouve que, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)}$$

et $a_0 = 1$. On en déduit finalement que

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir le développement en série entière de f en utilisant le même argument que celui utilisé pour son existence, c'est-à-dire en utilisant le produit de Cauchy des développements en série entière de $e^{x^2/2}$ et $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2}dt$.

Thème 6 : Usage du dénombrement

Exercice 1

1. Puisque $\{1, 2, 3\}$ a trois éléments, il existe exactement 6 bijections différentes de $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même :

- l'identité;
- les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
- les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas. On en déduit que

$$D_{3,0} = 2,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1.$$

2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ ayant k point fixes, alors les ensembles $A_0, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est égale à l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Ainsi, on a bien $n! = \sum_{k=0}^n \mathrm{card}(A_k) = \sum_{k=0}^n D_{n,k}$.

3. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a

- $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n);
- ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a $D_{n-k,0}$ telles permutations.

Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\binom{n}{k}D_{n-k,0}$.

4. Clairement, on a $0 \leq d_n \leq n!$, soit $\frac{|d_n||z|^n}{n!} \leq |z|^n$. La série converge absolument si $|z| < 1$, son rayon de convergence est au moins égal à 1.

5. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x| < 1$.

De plus, on a $(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n \text{ avec } b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\times\frac{1}{k!}$.

Mais $$\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}D_{n,k}=1.$$

On obtient $$(\exp x)f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

6. De l'égalité $(\exp x)f(x)=\frac{1}{1-x}$, on tire

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n \text{ avec } c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Par identification, on obtient bien $d_n=n!\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$.

7. La probabilité recherchée est $p_n=d_n/n!=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de $\exp(-x)$, on trouve que cette probabilité converge vers $\exp(-1)=1/e$.

1. Considérons s une involution de $\{1,\dots,n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $\{1,\dots,n\}$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $\{1,\dots,n\}$. Dans ce cas, $s(k)=n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que

$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}.$$

2. Une involution est nécessairement bijective. Donc $I_n\leq n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1.

3. On a

$$(1+x)S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{I_n}{n!}x^n+\sum_{n\geq 1}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n=1+\sum_{n\geq 1}\frac{I_n+nI_{n-1}}{n!}x^n.$$

En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$(1+x)S(x)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n=S'(x).$$

4. La résolution de l'équation différentielle donne, compte tenu de la condition initiale $S(0)=1$,

$$S(x)=e^{x+\frac{x^2}{2}}=e^x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve

$$I_{2p}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!} \text{ et } I_{2p+1}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}.$$

Mathématicien du mois

Stanislaw Ulam (1909-1984)

Toutes les biographies
*Signaler une erreur/Nous contacter**Mentions Légales*Confidentialité
*Contact*Confidentialité*Mentions légales*