EL Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

Theme
cte $\gamma$ d'Euler

PREPAS CONCOURS
Integrals - Series Numeriques

## Theme 1 ~~cte $\gamma$ d'Euler~~ Comparaison $\Sigma$-$\int$

### Partie I

1) Soit $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ positive continue par morceaux tq $f$ est $\searrow$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$

$a \in \mathbb{N}$

i) Mq

$$\boxed{\int_{n-1}^{m} f(t)\,dt \leq S_n = \sum_{k=n}^{m} f(k) \leq \int_{n}^{m+1} f(t)\,dt \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^* \text{ tq } a \leq n \leq m}$$

Indic : Mq $f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$

puis utiliser relation de Chasles

ii) En deduire que la serie $\sum\limits_{k \geq a} f(k)$ et l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de meme nature

iii) Mq $0 \leq -\displaystyle\int_{a+1}^{n+1} f(t)\,dt + \sum_{k=a+1}^{n} f(k) \leq -\int_{n}^{n+1} f(t)\,dt + \int_{a}^{a+1} f(t)\,dt$

iv) En deduire que la serie num $\sum\limits_{k \geq a} \left( -\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,dt + f(k) \right)$ Cvge

(v) On suppose qu'on est en cas de cvgce dans (ii)

Mq $\sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$

(vi) Mq en cas de dvgce on a

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) \sim \int_a^n f(t)\,dt$$

(vii) App : Integrals de Bertand

(a) mq $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ cvge ssi $\beta > 1$

(b) Donner un equivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta}$ qd $\beta > 1$

(c) " " $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta}$ qd $\beta < 1$

## Partie II / cte $\gamma$ d'Euler

(1) Mq $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$ qd $n \to +\infty$

indic : on pourra mq $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

(2) on $\gamma_n = H_n - \ln(n+1)$

(i) Mq $0 \leq \gamma_n \leq 1$

(ii) Etudier la monotonie de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(iii) En deduire que $(\gamma_n)$ cvge

(iv) On pose $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma_n$ - Mq $0 \leq \gamma \leq 1$

③ Justifier que $\cancel{H_n = \ln n + O(1)}$

$$\boxed{H_n = \ln n + \gamma + o(1)}$$

④ ⓘ Justifier que la serie $\sum_{k \geq 2} \left( \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$ cvge

indic : On pourra mq $\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2}$

ⓘⓘ ⓐ Mq $\sum_{k=2}^{n} \left( \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right) = \ln n - H_n + 1$

ⓑ En deduire que $\sum_{k=2}^{+\infty} \left( \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right) = -\gamma + 1$

ⓒ En deduire que $H_n - \ln n - \gamma = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left( \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$

puis que $H_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$

ⓓ Conclure que $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

④ on pose $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$

ⓘ Mq I cvge

ⓘⓘ Mq $e^{-t} \left( \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left( e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right)}_{f_n(t)}$

ⓘⓘⓘ Mq $\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\, dt = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

on pourra utiliser ce resultat $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) Mq $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$

(v) On deduire que $\boxed{\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt}$

(5) On pose $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$

(i) Mq $J$ cvge

(ii) Mq $\displaystyle\lim_{y \to 0^+} \Big(\ln y + \underbrace{\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt}_{}\Big) = 0$

mq il cvge d'abord

(iii) Mq $\displaystyle\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$

Indice : Utiliser II . 4 . v

(iv) On deduire que $\displaystyle\lim_{y \to 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right) = 0$

(v) Conclure que $\boxed{\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt}$



FIN

BONNE CHANCE