Séries Numériques

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ étant une suite réelle, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$. A toute suite réelle a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

1) Comparaison des convergences des deux suites.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [\![0, n]\!]$.

i) Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

d) On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2) Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

a) Pour $n \in [\![0, 3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k$.

b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(\mathcal{E})\quad U_n = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

i) A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

ii) Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

c) On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d) La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Correction :

Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ étant une suite réelle, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.
A toute suite réelle a, on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

1) Comparaison des convergences des deux suites.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k <u>fixé</u>, $k \in [\![0, n]\!]$.

i) Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : On a

$$\binom{n}{k} = \frac{\prod_{i=1}^{k} (n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Par croissance comparées, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$.

b) Soit a une suite réelle et q un entier naturel <u>fixé</u>.
On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

Correction : q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une somme finie de suites de limite nulle et

$$\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$$

c) On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que pour tout $k \geq q$, $|a_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|S_q(n,a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors :

$$\forall n \geq n_0,\ |a_n^*| = \left| S_q(n,a) + \frac{1}{n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=q+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement pour tout $n \geq n_0$,$|a_n^*| \leqslant \varepsilon$ et on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$$

d) On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

Correction : On a $a_n^* - l = \displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l)$ et on se ramène au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$$

e) La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

Correction : Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2) Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

a) Pour $n \in [\![0,3]\!]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme
$U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k$.

Correction : Un calcul direct donne

$$U_0 = S_0,\ U_1 = 2S_0 + S_1,\ U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0,\ U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$$

b) On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$(\mathcal{E})\quad U_n = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}$$

i) A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question précédente ?

Correction : On peut supposer, d'après la question précédente, que $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$.

ii) Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

Correction : La formule précédente est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie au rang $n-1$. On remarque que

$$U_n = 2^n T_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)S_k + S_n$$

Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) S_k + S_n$$

La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.
D'après le théorème de récurrence le résultat est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Correction : On suppose que $\sum(a_n)$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \to S$ quand $n \to +\infty$. Avec la question précédente, on a

$$U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} - S_1$$

Comme $S_{n+1} \to S$, la première question indique que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{k+1} = S$, ce qui donne $\frac{U_{n-1}+S_1}{2^n} \to S$ ou encore $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2S$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

d) La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Correction : Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum(a_n)$ diverge alors que $\sum(a_n^*)$ converge. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ n'ont donc pas toujours même nature.