Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries Numériques

Introduction

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

On étudie la série de terme général a_n. On montre qu'elle est convergente et on donne différentes représentations de sa somme, notée γ, et appelée **Constante d'Euler**. Pour cela on commence par étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

On s'intéresse également à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

PARTIE I : Première approche de la constante d'Euler

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, montrer que

$$0 \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle est convergente et que sa limite γ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

3) Vérifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$a_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} \mathrm{d}t,$$

puis montrer que pour tout entier $p \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

4) En déduire un encadrement de $S_m - S_n$ pour m et n des entiers vérifiant $m > n \geqslant 1$. Puis montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\frac{1}{2n+2} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

5) Conclure qu'on a le développement asymptotique suivant pour la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n = S_n + \dfrac{1}{2n+2}$. Montrer que

$$0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Déterminer un entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel T_n est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. Donner alors un encadrement de γ à 10^{-2} près.

PARTIE II : DEUX REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DE LA CONSTANTE D'EULER

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On dira que f est ***intégrable*** *sur I si l'intégrale impropre de f sur I est absolument convergente.*

On admettra le résultat suivant : *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, borné ou non et soit $\sum u_n$ une série de fonctions réelles positives, définies, continues par morceaux et intégrables sur l'intervalle I. Si la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux et si la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge, alors, la fonction somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

1) Dans cette question, on se propose de démontrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes **:**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}$ quand $t \to 0^+$.

c) Conclure.

2) Dans cette question on se propose de démontrer que si a et b sont deux réels strictement positifs, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

Soient x et y deux réels strictement positifs.

a) Démontrer que :

$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que pour $a \leqslant b$ on a pour tout réel $z > 0$:

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \mathrm{d}t \leqslant e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

c) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \mathrm{d}t = \ln \frac{b}{a}.$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler.

a) Démontrer que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) En déduire que pour pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}\right).$$

c) Démontrer que pour tout réel $t > 0$, on a :

$$1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0.$$

d) Retrouver alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ et démontrer l'égalité :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler.

Soit y un réel strictement positif.

a) Calculer $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$, puis déduire que

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t\right) = 0.$$

b) Démontrer que :

$$\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{y} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que :

$$\lim_{y\to 0^+}\left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right) = 0.$$

d) Démontrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t = \lim_{y\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{-y}\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t\right).$$

e) Conclure alors que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

PARTIE III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) a) Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^{1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

(**Indication** : *on pourra calculer chacune des deux intégrales*).

b) En utilisant l'égalité obtenue en II.3)d), démontrer que :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2) Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$.

(On rappelle que $H_0 = 0$ et pour $k \geqslant 1, H_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}$.)

a) Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F'(x) - F(x) = \frac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1).$$

c) Montrer alors que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$F(x) = \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3) Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x > 0$ on a :

$$\gamma + \ln x = \mathrm{e}^{-x} F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

4) Soit un entier $n \geqslant 1$ et soit un entier $a \geqslant 2$. Montrer que :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k \leqslant \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}.$$

(**Indication** : *on pourra admettre et utiliser l'inégalité :* $n! \geqslant \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
)

5) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\left| \gamma + \ln n - \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leqslant \frac{a}{a-1} \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an} + \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

6) Décrire une méthode permettant le calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-10} près. (On ne demande pas le calcul d'une telle valeur approchée.)

PARTIE IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose :

$$v_p = p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

1) **a)** En séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs dans l'expression de v_p, montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$ on a :

$$v_p = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p) \qquad \text{où} \qquad \sigma_p = \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h}.$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Montrerque pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d) En utilisant le développement asymptotique de H_n, obtenu en **I. 5)**, conclure que la série de terme général v_p est convergente et qu'on a :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = (-1)^n \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$$

où $\log_2$ désigne la fonction logarithme en base 2 et $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Expliquer pourquoi le critère spécial des séries alternées ne permet pas de montrer la convergence de la série de terme général u_n.

b) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

puis en déduire que :

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soit n un entier naturel et soit m un entier tel que : $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathcal{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

et en déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.$$

3) On pose pour tout entier naturel n :

$$r_n = \sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

a) Montrer que la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Exprimer v_k en fonction de k, r_k et r_{k+1}. Montrer ensuite que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}.$$

Conclure que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right)$$

PARTIE V : La formule de Gosper (1972)

Dans cette partie on désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Si $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{F}$, on notera aussi $x[k]$ le terme x_k de la suite x. On considère l'endomorphisme Δ de $\mathcal{F}$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathcal{F}, \forall\, k \in \mathbb{N},\ \Delta(x)[k] = x[k] - x[k+1].$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Δ^n l'endomorphisme de $\mathcal{F}$ obtenu en composant Δ avec lui même n fois et on pose $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout entier $p \in [0, n]$, $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binômial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathcal{F}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} x_{p+k}.$$

(**Indication** : *écrire* $\Delta = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}} - T$ *où* T *est l'endomorphisme de* $\mathcal{F}$ *défini, pour tout* $x \in \mathcal{F}$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$, par : $T(x)[k] = x[k+1]$.)

2) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et de limite ℓ. On se propose de montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \ell.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \right)_{n \geqslant p}$ converge vers 0.

b) On suppose dans cette question $\ell = 0$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0.$$

(**Indication :** *On pourra utiliser l'égalité suivante :*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p} u_p + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p$$

et, étant donnée un réel $\varepsilon > 0$, *choisir un entier* k *suffisamment grand pour que l'on ait* $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=k+1}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.)

c) Conclure pour le cas général où ℓ est quelconque.

3) Dans cette question, on se propose de démontrer la propriété suivante : Soit $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$. Si la série $\sum (-1)^k x_k$ converge, alors, la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$U_N = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k x_k \qquad \text{et} \qquad V_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

a) Démontrer que

$$V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{q=0}^{N} \binom{N+1}{q+1} U_q.$$

(*on pourra observer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $(-1)^k x_k = U_k - U_{k-1}$, *avec, par convention,* $U_{-1} = 0$).

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) On considère dans cette question un entier $n \geqslant 1$ ainsi que la suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_j = \frac{1}{2^n + j}.$$

a) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$ on a :

$$\Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

Indication : *On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : Pour* $m, n \in \mathbb{N}$ *on a* :

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

b) En déduire que :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

c) Conclure que la constante d'Euler peut s'écrire :

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k}+k}{k}}.$$

CORRIGÉ DM N°11

Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[p, p+1]$ donc $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

   En intégrant cette inégalité entre p et $p+1$, on obtient : $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}$ soit $-\dfrac{1}{p} \leqslant -\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1}$ et finalement

$$\boxed{0 \leqslant a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}$$

2. • En additionnant les inégalités précédents pour p variant de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

   Donc la suite (S_n) est majorée.

   • $\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = a_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite (S_n) est croissante ; étant majorée, elle converge, vers une limite notée γ.

   • De l'encadrement $0 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant 1$ trouvé ci-dessus, on déduit immédiatement $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3. $a_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+p}$ en faisant le changement de variable $t = u + p$.

   D'où $a_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{p}{u+p} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} \, \mathrm{d}u$.

   Pour $u \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{u+p} \leqslant \dfrac{1}{p}$ donc, d'après le calcul ci-dessus :

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_0^1 u \, \mathrm{d}u$$

   d'où, pour $p \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

4. Soient m et n des entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Alors $\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{m} a_p - \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=n+1}^{m} a_p$ donc d'après l'encadrement précédent :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leqslant \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$$

   d'où après télescopage :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \leqslant \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

   et, en faisant tendre m vers $+\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \gamma - \mathrm{S}_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{S}_n + \ln(n+1)$ donc

$$\mathrm{H}_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = \mathrm{S}_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to \infty}{=} \mathrm{S}_n - \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

en utilisant le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{O}(x^2)$.

Or, d'après l'inégalité précédente :

$$0 \leqslant \mathrm{S}_n - \gamma + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

ce qui montre que $\mathrm{S}_n - \gamma + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où finalement :

$$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .}$$

6. Il suffit de reprendre l'inégalité trouvée à la question 4 !

7. Pour $n = 7$, l'inégalité précédente donne $0 \leqslant \gamma - \mathrm{T}_n \leqslant \dfrac{1}{112} < 10^{-2}$, donc T_7 convient.

On trouve $\mathrm{T}_7 = \dfrac{1487}{560} - 3 * \ln(2) \approx 0.575915601$ alors que $\gamma \approx 0.57721566490153286061$.

Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1. a) • Soit $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1-e^{-t}}$. f est continue et à valeurs positives sur $[1,+\infty[$; quand $t \to +\infty$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$ donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$; puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (fonction de référence), il en est de même de f.

• Soit $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$. g est continue et à valeurs positives sur $[1,+\infty[$; puisque $t \geqslant 1$, on a $g(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, et, puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de g.

b) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - 1 + t}{t(1-\mathrm{e}^{-t})}$. Or, en utilisant le développement limité $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, on a

$$\mathrm{e}^{-t} - 1 + t \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad t(1-\mathrm{e}^{-t}) \underset{t\to 0}{\sim} t^2$$

donc

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}\ .}$$

c) La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et, d'après la question précédente, elle se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \varphi$ existe.

D'après la question a), φ est somme de deux fonctions intégrables sur $[1,+\infty[$; elle est donc également intégrable sur $[1,+\infty[$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \text{ existe.}}$

2. a) Soient x, y deux réels strictement positifs.

En effectuant le changement de variable $u = at$, on a $\displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et, de même, $\displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

Donc

$$\begin{aligned}
\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bx}^{ay} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

b) On suppose ici $a \leqslant b$ et $z > 0$.
On a donc : $\forall t \in [az, bz],\ \mathrm{e}^{-bz} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-az}$, d'où en intégrant (les bornes sont dans le bons sens !),

$$\mathrm{e}^{-bz} \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-az} \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ce qui donne, compte tenu de $\displaystyle\int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln bz - \ln az = \ln \frac{b}{a}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-az} \ln \frac{b}{a}}$$

c)
- Il résulte de l'encadrement trouvé ci-dessus, et du théorème d'encadrement des limites, que $\displaystyle\lim_{z \to 0^+} \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \ln \frac{b}{a}$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut écrire

$$\lim_{y \to +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u = \lim_{y \to +\infty} \left(\int_1^{by} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u - \int_1^{ay} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u \right) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u = 0$$

- Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to +\infty}} \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \,\mathrm{d}t = \lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u - \lim_{y \to +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-u}}{u} \,\mathrm{d}u = \ln \frac{b}{a}$$

3. Une première représentation intégrale de la constante d'Euler

a)
- On sait d'après le cours que, si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

  Puisque $t > 0$, $0 < \mathrm{e}^{-t} < 1$ donc $\displaystyle\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$.
- Par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right) = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} \right) = \frac{1}{t}$$

b) On en déduit :

$$\mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t} \right)$$

c) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ étant convexe, sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $t = 0$, qui a pour équation $t \mapsto 1 - t$.

Ainsi, pour tout t réel, $\mathrm{e}^{-t} \geqslant 1 - t$ soit $1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t$, et, pour $t > 0$, on en déduit $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant 1$ ou encore $\boxed{1 - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \geqslant 0}$.

d) Pour $t > 0$, posons $f(t) = \mathrm{e}^{-t} \left(\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \dfrac{1}{t} \right)$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(t) = \mathrm{e}^{-(n+1)t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)t} - \mathrm{e}^{-(n+2)t}}{t}$.
Vérifions alors les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme obligeamment rappelé par l'énoncé :

- Les fonctions u_n sont évidemment continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

- D'après les résultats de la question II.2, avec $a = n+1$ et $b = n+2$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\, dt = \ln\frac{n+2}{n+1}$.

  La fonction $t \mapsto e^{-(n+1)t}$ est elle aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\, dt = \frac{1}{n+1}$.

  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1}$.
- La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+2}{n+1}\right)$ a même nature, et même somme, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n\geqslant 1} a_n$, donc converge et a pour somme γ.
- Enfin, la question II.3.b assure la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum u_n$ vers f, qui est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$.Le théorème d'intégration terme à terme assure alors que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \gamma$ soit :

$$\boxed{\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt\ .}$$

4. Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

a) y est un réel strictement positif. Ce qui a été fait à la question II.1 assure l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt$ .Le changement de variable $u = e^{-t}$, qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[y, +\infty[$ sur $]0, e^{-y}]$ donne alors :

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = -\int_{e^{-y}}^{0} \frac{u}{1-u}\frac{1}{u}\, du = \int_0^{e^{-y}} \frac{du}{1-u} = -\ln(1-e^{-y})$$

donc $\displaystyle\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt = -\ln\left(\frac{1-e^{-y}}{y}\right)$ qui tend vers 0 quand y tend vers 0^+, puisque $1 - e^{-y} \underset{y\to 0}{\sim} y$.

b) Le résultat de II.3.d donne

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_y^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt
\end{aligned}$$

(on a le droit de séparer ces trois intégrales, puisqu'elles convergent, en vertu de II.1 !). On en déduit :

$$\boxed{\gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt}$$

c) Donc $\displaystyle\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \underbrace{\int_0^{y} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt}_{\substack{\text{tend vers 0 quand } y\to 0 \text{ car c'est l'intégrale} \\ \text{d'une fonction prolongeable par continuité en 0}}} + \underbrace{\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\, dt}_{\substack{\text{tend vers 0 quand } y\to 0 \\ \text{d'après II.4.a}}}$

tend vers 0 quand $y \to 0^+$.

d) • La fonction $f : t \mapsto e^{-t}\ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- f est de signe constant sur $]0,1]$, et $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \ln t$; puisque $\displaystyle\int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t$ existe (intégrale de référence), il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 |f|$ existe.
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$ (croissances comparées) donc $f(t) \underset{t\to\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$; puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} |f|$.

En conclusion, f est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soient alors x, y deux réels strictement positifs tels que $y < x$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_y^x \mathrm{e}^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\ln t\right]_y^x + \int_y^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-y}\ln y - \mathrm{e}^{-x}\ln x + \int_y^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et, puisque $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[y,+\infty[$, on en tire, en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\int_y^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-y}\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et enfin, puisque $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to 0^+}\left(\mathrm{e}^{-y}\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)}\ .$$

e) D'après les résultats des questions c) et d) :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to 0^+}\left((\mathrm{e}^{-y}-1)\ln y + \ln y + \int_y^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{y\to 0^+}(\mathrm{e}^{-y}-1)\ln y - \gamma = -\gamma$$

puisque $(\mathrm{e}^{-y}-1)\ln y \underset{y\to 0^+}{\sim} y\ln y$. Ainsi :

$$\boxed{\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t}\ .$$

Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1. **a)** • On avait trouvé, en II.A.a, pour tout réel $y > 0$, $\displaystyle\int_y^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-\mathrm{e}^{-y})$,

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-\mathrm{e}^{-1})$.

• Soit $x \in]0,1]$. Le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$ donne

$$\begin{aligned}\int_x^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t &= -\int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^{-1}} \left(\frac{-1}{\ln u} - \frac{u}{1-u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^{-1}} \left(\frac{1}{u\ln u} + \frac{1}{1-u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \left[\ln|\ln u| - \ln(1-u)\right]_{\mathrm{e}^{-x}}^{\mathrm{e}^{-1}} \\ &= -\ln\left(\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right) - \ln(1-\mathrm{e}^{-1})\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$, on en déduit $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t = -\ln(1-\mathrm{e}^{-1})$ et, finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-\mathrm{e}^{-1}).}$$

b) D'après II.3.d :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{1} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

Donc, en utilisant la question précédente (toutes les intégrales écrites sont bien convergentes !) :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^{1} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{1} \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{1}\left(\frac{1}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{1}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé.

2. a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}x^k$ est une série entière. Pour déterminer son rayon de convergence, on peut utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques. Si $x \neq 0$,

$$\frac{\left|\dfrac{\mathrm{H}_{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}\right|}{\left|\dfrac{\mathrm{H}_k}{k!}x^k\right|} = \frac{\mathrm{H}_{k+1}}{\mathrm{H}_k}\,\frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{puisque } \mathrm{H}_k \underset{k\to\infty}{\sim} \ln k$$

ce qui prouve que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$. D'après les théorèmes du cours, on peut conclure :

$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}x^k \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\ .}$$

b) Les théorèmes du cours sur les séries entières permettent de dériver cette série terme à terme donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{(k-1)!}x^{k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}x^k\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{(k-1)!}x^{k-1} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{H}_k - \mathrm{H}_{k-1} = \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 1$. En comparant avec le développement en série entière de exp : $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$, on a bien, pour $x \neq 0$: $\boxed{\mathrm{F}'(x) - \mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1)\ .}$

c) On résout alors l'équation différentielle ci-dessus par la méthode de variations de la constante. En posant $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x\varphi(x)$ pour tout $x > 0$, on obtient $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(\mathrm{e}^x - 1)$, d'où $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + cste$. Puisque $\varphi(0) = \mathrm{F}(0) =$, la constante est nulle et l'on obtient bien :

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x\int_0^x\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\ .}$$

3. Pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned}
\gamma+\ln x+\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t &= \gamma+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{(d'après III.1.b)}\\
&=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^x\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui donne bien, compte tenu de la question précédente :

$$\boxed{\gamma+\ln x=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{F}(x)-\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\ .}$$

4. Puisque, pour $k\geqslant 1$, $\mathrm{H}_k=\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}$, on a $\mathrm{H}_k\leqslant k$ donc

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k\leqslant\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{n^k}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^{an+1+k}}{(an+k)!}=n^{an+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k}{(an+k)!}=n^{an+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(an)^k}{(an+k)!}\left(\frac{1}{a}\right)^k$$

et, puisque, pour tout entier $k\geqslant 0$, $\frac{(an)^k}{(an+k)!}\leqslant\frac{1}{(an)!}$ et que la série géométrique $\sum\frac{1}{a^k}$ converge (car $a\geqslant 2$), on obtient la première inégalité demandée :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k\leqslant\frac{n^{an+1}}{(an)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^k$$

En utilisant l'indication de l'énoncé, on a $(an)!\geqslant\sqrt{2\pi an}\left(\frac{an}{\mathrm{e}}\right)^{an}$; on a aussi $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{a}}=\frac{a}{a-1}$, et, en remplaçant dans l'inégalité précédente, on trouve :

$$\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k\leqslant\frac{a}{a-1}\frac{n^{an+1}}{\sqrt{2\pi an}}\left(\frac{\mathrm{e}}{an}\right)^{an}=\frac{a}{a-1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}$$

5. D'après III.3, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\gamma+\ln n=\mathrm{e}^{-n}\mathrm{F}(n)-\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k-\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\gamma+\ln n-\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k=\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k-\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\left|\gamma+\ln n-\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k\right|\leqslant\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=an+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k+\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{a}{a-1}\frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}+\frac{1}{n}\underbrace{\int_n^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=\mathrm{e}^{-n}}$$

ce qui est le résultat demandé.

6. Pour $a\geqslant 3$, $\frac{\mathrm{e}}{a}<1$, et le terme $\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}$ est vite négligeable devant $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$!

On peut donc considérer que l'erreur commise en approchant γ par l'expression $\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{an}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}n^k - \ln n$ est à peu près égale à $\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$. Pour avoir une erreur inférieure à 10^{-10}, il faut donc choisir $n = 21$ ($\frac{e^{-21}}{21} \approx 3,6\ 10^{-11}$).
Dans ce cas, pour minimiser le nombre de termes à calculer, autant prendre $a = 3$; d'ailleurs, pour $a = 3$ et $n = 21$, le terme $\frac{a}{a-1}\frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}}\left(\frac{\mathrm{e}}{a}\right)^{an}$ est approximativement égal à $2,4\ 10^{-12}$, ce qui confirme que la valeur de a n'a finalement pas d'importance pour le calcul d'erreur !

Une valeur approchée de γ sera donc $\mathrm{e}^{-21}\sum_{k=0}^{63}\frac{\mathrm{H}_k}{k!}21^k - \ln 21$. Bien sûr, pour le cacul de cette somme, on ne calculera pas séparément n^k et $k!$, mais on utilisera la relation de récurrence $\frac{n^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{n^k}{k!}\cdot\frac{n}{k+1}$.

Bien que non demandé, voici le programme Maple© correspondant :

```
approx := proc (a, n)
local H, k, S, nk;
S := 0;
H := 1.0;
nk := n;
for k to a*n do
    S := S+H*nk;
    H := H+1/(k+1);
    nk := nk*n/(k+1)
end do;
RETURN(evalf(exp(-n)*S-ln(n)))
end proc;

> Digits := 20; approx(3, 21); evalf(gamma);

                0.57721566493588897937
                0.57721566490153286061
```

<u>**Partie IV :** La constante d'Euler somme de la série de Vacca</u>

1. **a)** Pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{v_p}{p} = \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{\substack{k=2^p\\ k\ \text{pair}}}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=2^p\\ k\ \text{impair}}}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=2^p\\ k\ \text{pair}}}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} - \sum_{\substack{k=2^p\\ k\ \text{pair}}}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k}\right) \\
&= 2\sum_{\substack{k=2^p\\ k\ \text{pair}}}^{2^{p+1}-2}\frac{1}{k} - \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=2^{p-1}}^{2^p-1}\frac{1}{2k} - \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1}\frac{1}{k} = \sigma_{p-1} - \sigma_p
\end{aligned}$$

   b) Donc

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=1}^{n} p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^{n} p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}(p+1)\sigma_p - \sum_{p=1}^{n} p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1}[(p+1)-p]\sigma_p - n\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1}\sigma_p - n\sigma_n$$

c) Pour $n \geqslant 1$:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} = \sum_{h=0}^{2^n-1} \frac{1}{h} = \mathrm{H}_{2^n} - \frac{1}{2^n}$$

d) On a donc

$$\sigma_n = \sum_{p=0}^{n} \sigma_p - \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = \mathrm{H}_{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - \mathrm{H}_{2^n} + \frac{1}{2^n} = \mathrm{H}_{2^{n+1}} - \mathrm{H}_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n = \mathrm{H}_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\sigma_n = \mathrm{H}_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n\big(\mathrm{H}_{2^{n+1}} - \mathrm{H}_{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\big)$$

En utilisant le développement asymptotique de H_{2^n} obtenu en I.5, on en déduit :

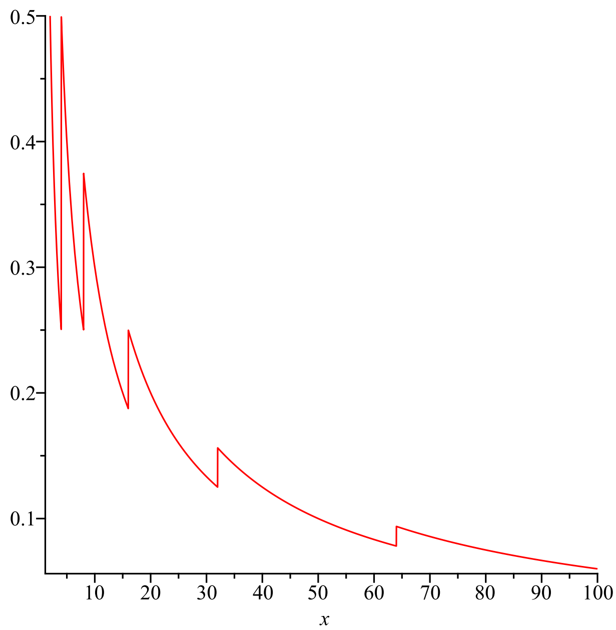
$$\sum_{p=1}^{n} v_p = \ln(2^n) + \gamma + \frac{1}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} - n\Big(\ln(2^{n+1}) + \gamma + \frac{1}{2^{n+2}} - \big(\ln(2^n) + \gamma + \frac{1}{2^{n+1}}\big) + o\left(\frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

$$= \gamma + \frac{n}{2^{n+2}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} v_p = \gamma$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_p \text{ converge et } \sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma\ .}$$

2. **a)** On ne peut pas appliquer ici le critère spécial sur les séries alternées car la suite $n \mapsto \dfrac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$ n'est pas décroissante. Voici d'ailleurs le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{\lfloor \log_2 x \rfloor}{x}$:



b) • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En particulier, elle est convergente, et si on pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, on sait que $\left|\mathrm{R}_n\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Or on a $\displaystyle\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} = \mathrm{R}_{2^{n+1}-1} - \mathrm{R}_m$ donc $\displaystyle\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \left|\mathrm{R}_{2^{n+1}-1}\right| + \left|\mathrm{R}_m\right|$ ce qui donne

$$\left|\sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{m+1} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

- Pour k entier tel que $2^{n+1} \leqslant k < 2^{n+2}$, on a $n+1 \leqslant \log_2 k < n+2$ donc $\lfloor \log_2 k \rfloor = n+1$.
  Par suite $\displaystyle\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k = \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k} \lfloor \log_2 k \rfloor = (n+1) \sum_{k=2^{n+1}}^{m} \frac{(-1)^k}{k}$ et l'inégalité précédente donne immédiatement :

$$\boxed{\left| \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}\ .}$$

c) • Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$.
Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} u_k &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \\ &= \sum_{p=0}^{n} v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k\end{aligned}$$

et, puisque $\left| \displaystyle\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k \right| \leqslant \frac{n+1}{2^n}$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=2^{n+1}}^{m} u_k = \mathrm{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)$ i.e $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{p=0}^{n} v_p + \mathrm{O}\left(\frac{n}{2^n}\right)\ .}$

- Pour tout entier $\geqslant 1$, il existe un et une seul entier n tel que $2^{n+1} \leqslant m < 2^{n+2}$: c'est $n = \lfloor \log_2 m \rfloor - 1$. Donc, quand m tend vers $+\infty$, il en est de même de n ; puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} v_p = \gamma$, il résulte immédiatement de la relation précédente que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_k$ existe et vaut γ, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma\ .}$$

3. **a)** D'après le critère spécial sur les séries alternées (majoration du reste), on sait que $|r_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$. La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc converge. Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit :

$$\boxed{\text{La série de terme général } |r_n| \text{ converge, i.e la série de terme général } r_n \text{ est absolument convergente.}}$$

b) • La relation $\boxed{v_k = k(r_k - r_{k+1})}$ est immédiate.

- On additionne ensuite ces relations pour k variant de 1 à n, et, exactement comme dans IV.1.b, on trouve facilement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} r_k - n r_{n+1}\,.}$
- De l'inégalité $|r_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n r_{n+1} = 0$.
  La relation précédente prouve donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \gamma$, ce qui peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right)\ .}$$

Partie V : La formule de Gosper

1. On reprend les notations et l'indication de l'énoncé. Dans l'anneau $\mathscr{L}(\mathscr{F})$, puisque $\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ et T commutent, on peut utiliser la formule du binôme. On a donc

$$\Delta^n = (\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} - \mathrm{T})^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \mathrm{T}^p$$

Or, par récurrence immédiate sur p, il est facile de vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathscr{F}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{T}^p(x)[k] = x[k+p]$. On aura donc bien, pour tout $x \in \mathscr{F}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\Delta^n(x)[k] = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \binom{n}{p} x[k+p]\ .}$$

2. *Rem : il s'agit dans cette question de démontrer le théorème de Césaro dans un cas particulier...*

a) Pour $n \geqslant p$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^p}{p!}$ donc $\displaystyle\frac{\binom{n}{p}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p!}\frac{n^p}{2^n}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (croissances comparées).

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0, par définition de la limite, il existe un entier k tel que, pour tout $p \geqslant k+1$, on ait $\left|u_p\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On aura alors, pour $n \geqslant k+1$:

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}\left|u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(puisque $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$).

D'autre part, d'après la question précédente, l'entier k étant fixé comme ci-dessus, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}u_p = 0$ (somme finie de termes qui tendent vers 0) donc il existe un entier n_0, que l'on peut supposer $\geqslant k+1$, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ on ait $\displaystyle\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, en utilisant l'égalité gentiment fournie par l'énoncé, on obtient, pour $n \geqslant n_0$:

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}u_p\right| + \left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre, par définition de la limite, que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p = 0\ .}$$

c) Dans le cas où la suite (u_n) tend vers ℓ, posons $v_n = u_n - \ell$. D'après le résultat précédent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}v_p = 0$.

Mais

$$\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}v_p = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(u_p-\ell) = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p - \left(\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\right)\ell = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p - \ell$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}v_p = 0$ implique : $\displaystyle\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p = \ell\ .}$

3. **a)** En utilisant le résultat de la question V.1 et l'indication de l'énoncé, on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n+1} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p x_p \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (\mathrm{U}_p - \mathrm{U}_{p-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{U}_p - \sum_{\substack{\cancel{p=0} \\ p=1}}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{U}_{p-1} \right) \quad (\text{car } \mathrm{U}_{-1} = 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{U}_p - \sum_{p=0}^{\overset{n}{\cancel{n-1}}} \binom{n}{p+1} \mathrm{U}_p \right) \quad \left(\text{en posant } \binom{n}{n+1} = 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \mathrm{U}_p \\
&= \sum_{p=0}^{\mathrm{N}} \left[\sum_{n=p}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \right] \mathrm{U}_p \quad \text{car} \begin{cases} 0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \\ 0 \leqslant p \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant p \leqslant \mathrm{N} \\ p \leqslant n \leqslant \mathrm{N} \end{cases}
\end{aligned}
$$

donc pour prouver la formule de l'énoncé, il suffit de prouver que

$$\forall p \in \mathbb{N}\,,\ \forall \mathrm{N} \geqslant p\,,\ \sum_{n=p}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2^{\mathrm{N}+1}} \binom{\mathrm{N}+1}{p+1}$$

ce qui se fait facilement par récurrence sur N :

- L'égalité est vérifiée pour $\mathrm{N} = p$, car elle s'écrit alors $\dfrac{1}{2^{p+1}} \dbinom{p}{p} = \dfrac{1}{2^{p+1}} \dbinom{p+1}{p+1}$.
- Supposons l'égalité réalisée au rang N. Alors,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) &= \sum_{n=p}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) + \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \left(\binom{\mathrm{N}+1}{p} - \binom{\mathrm{N}+1}{p+1} \right) \\
&= \frac{1}{2^{\mathrm{N}+1}} \binom{\mathrm{N}+1}{p+1} + \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \binom{\mathrm{N}+1}{p} - \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \binom{\mathrm{N}+1}{p+1} \quad (\text{avec l'hyp. de réc.}) \\
&= \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \binom{\mathrm{N}+1}{p+1} + \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \binom{\mathrm{N}+1}{p} \\
&= \frac{1}{2^{\mathrm{N}+2}} \binom{\mathrm{N}+2}{p+1} \quad (\text{d'après la formule du triangle de Pascal})
\end{aligned}
$$

ce qui est bien le résultat voulu à l'ordre $\mathrm{N}+1$, et achève la démonstration.

b) On a supposé que la série de terme général $(-1)^k x_k$ converge. Notons $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k$. On a donc $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{U_N} = \mathrm{S}$.
On a alors, d'après la relation précédente, et en utilisant le résultat de V.2.c, $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{V_N} = \mathrm{S}$. Cela revient à dire que la série de terme général $\dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^n+1}$ converge et a pour somme S, soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k .}$$

Rem : la série $\sum \dfrac{\Delta^n(x)[0]}{2^n+1}$ *s'appelle la* transformée d'Euler *de la série* $\sum (-1)^k x_k$. *Ces deux séries ont même somme, mais la série tranformée converge en général beaucoup plus vite que la série initiale !*

4. a) • *Rem : le résultat admis se démontre facilement par récurrence :*

Notons $\mathrm{I}_n, m = \int_0^1 x^n (1-x)^m \,\mathrm{d}x$, pour $n, m \in \mathbb{N}$.

Une intégration par parties donne :

$$\mathrm{I}_{n+1,m} = \int_0^1 x^{n+1}(1-x)^m \,\mathrm{d}x = \left[-x^{n+1}\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 + \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^n(1-x)^{m+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{m+1}\mathrm{I}_{n,m+1}$$

d'où l'on tire par une récurrence facile :

$$\mathrm{I}_{n,m} = \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)}\mathrm{I}_{0,m+n} = \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

- En utilisant le résultat de la question V.1, on a $\Delta^m(x)[0] = \displaystyle\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}\frac{1}{2^n+p}$.

  En écrivant que $\dfrac{1}{2^n+p} = \displaystyle\int_0^1 x^{2^n+p-1}\,\mathrm{d}x$, et par linéarité de l'intégrale on obtient :

$$\Delta^m(x)[0] = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}x^{2^n+p-1}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2^n-1}\left(\sum_{p=0}^{m}(-1)^p\binom{m}{p}x^p\right)\,\mathrm{d}x$$

  soit

$$\Delta^m(x)[0] = \int_0^1 x^{2^n-1}(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_{2^n-1,m} = \frac{(2^n-1)!m!}{(2^n+m)!} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}$$

b) On reprend le résultat de IV.3.b, qui peut s'écrire : $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}(-1)^j x_j\right)$, donc, d'après V.3.b, $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Delta^m(x)[0]}{2^m+1}\right)$, et enfin, en remplaçant à l'aide du calcul précédent :

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+m+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}\right)\ .}$$

c) Pour $m=0$, on a $\dfrac{1}{2^{n+m+1}}\dfrac{1}{\binom{2^n+m}{m}} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ donc $\gamma = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+m+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}\right)$ ce qui peut s'écrire

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{\substack{n+m=p\\ n\geqslant 1, m\geqslant 1}}\frac{1}{2^{n+m+1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{\substack{n+m=p\\ n\geqslant 1, m\geqslant 1}}\frac{1}{\binom{2^n+m}{m}} = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{\binom{2^{p-m}+m}{m}}$$

Rem : Cette série converge très rapidement. Par exemple, en calculant pour p *variant de* 2 *à* 100*, on trouve une précision de l'ordre de* 10^{-30}.