

Preparations
Concours

Integrals - Series Numerique

Thème : Integrals de Dirichlet

on pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, $J = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$, $K = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$

Partie I / Etude de la cvge

① Justifier que $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ cvge

② Mg $\int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi} du$

intric: Chasle + chge de VAR

③ En deduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ ~~cvge~~ fini

④ En deduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt$ est fini

intric: Considerer $n = \left[\frac{x}{\pi} \right]$

⑤ conclure que I, J et K cvge

①

⑥) Mq $\forall x \geq \pi$, $\int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \ln \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{2x} \frac{\cos u}{u} du$

indic : $|\sin t| \geq \sin^2 t$

(ii) en deduire que $\int_{\pi}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge

⑦) Que peut-on dire des integrales L, J, K

Partie II / Noyau de Dirichlet

pour tout $t \neq 2\pi\mathbb{Z}$ on pose 1

$$D_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

indic : $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$

① Mq $D_n(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} - 1 \right)$

② Verifier que $\int_0^{\pi} D_n(t) dt = 0$

③ En deduire que $\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin(t/2)} dt = \pi$

puis que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \frac{\pi}{2}$

②

Partie II / Calcul de I

① Montrer le résultat suivant : Lemme de Lebesgue

soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

② on pose $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

③ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

(i) Montrer que f est continue en 0

(ii) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$

(iii) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0

(iv) Conclure

④ En déduire de ce qui précède que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{t}{n}\right) \sin((2n+1)t) dt = 0$$

⑤ Conclure que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

③

Partie IV / $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ Demo / (Mines 2023)

- ① Trouver deux nombres α et β ^{avec détails} _{indications}

$$\int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

② Mg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \equiv \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) dt$

où $f(t) = \frac{\frac{t}{2\pi} - t}{2 \sin(\pi/2)}$ _{si $t \neq 0$}
 si $t = 0$

- ③ Vérifier que f est la classe $\hat{\sin}(0, \pi)$

④ En déduire que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

indice : on pourra utiliser qd III. 1

④

Fin Bonne
Chance