Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries Numériques

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}$.

III.4. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

III.5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est uniformément bornée).

III.5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A.

III.5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

III.6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

III.6.a Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2\, i \sin(x/2) e^{i\, x/2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in \,]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

III.6.b Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout} \qquad x \in [0, \pi], \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) .$$

III.6.c On se propose dans cette question de démontrer que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

i. Déterminer alors les coefficients de Fourier de la fonction U.
   On pourra utiliser pour p et n entiers naturels non nuls :

$$p \neq n, \quad \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et pour } p = n \quad \int_0^{\pi} \sin(nx)\, \sin(px)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} .$$

ii. En utilisant la formule de Parseval, aboutir à une contradiction.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

III.7. Si $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

III.8. On considère la série entière de la variable complexe $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

III.8.a On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ (en particulier la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

III.8.b On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leq \cos\alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

III.8.c Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos\alpha\right\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

III.8.d On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathrm{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos\alpha} \ .$$

III.8.e Démontrer que la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α $\left(\text{pour } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Corrigé

Première partie
Convergence des séries par transformation d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1})$$
s'écrit aussi sous la forme
$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$, donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})$ converge puisque la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

   b) D'après la transformation précédente, on déduit que la nature de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k b_k$ est celle de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ avec $u_k = (a_k - a_{k+1}) B_k$, car $\lim_{n\to\infty} a_n B_n = 0$.
   La différence $a_k - a_{k+1}$ étant positive puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, on a $|u_k| \leq M(a_k - a_{k+1})$ où $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |B_n|$, donc
$$\sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq M \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = M(a_0 - a_{n+1}).$$
   La somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, à termes positifs, étant majorée par Ma_0, cette série converge donc absolument, donc convergente.

c) Dans ce cas la somme $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est égale soit à 1 soit à 0, donc elle est majorée. D'où la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$.

3. a) Puisque $\theta \neq 2k\pi$, alors $e^{i\theta} \neq 1$ et par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}}\frac{e^{\frac{-in\theta}{2}}-e^{\frac{in\theta}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

b) Les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ sont toutes deux convergentes si et seulement si, la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}+i\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

est convergente. Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|e^{in\theta}| = 1$ donc $\left|\frac{e^{inx}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$, donc

• si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente, d'après le régale de Riemann.

• si $\alpha \leq 0$, le terme général de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, donc cette série diverge.

• soit $\alpha \in]0,1]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \cos n\theta$ (resp. $\sin n\theta$) et $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Clairement $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de limite 0, et il résulte de la question 3.a :

$$\exists M = \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |A_n| \leq M.$$

Donc d'après la question 1. la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ (resp. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$) converge.

En conclusion, la séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ si et seulement si, $\alpha > 0$.

4. D'après le question 3., la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge pour tout point $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, il s'agit de la série nulle, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Deuxième partie
Convergence uniforme de séries

5. a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in A$, $|F_n(z)| \leq M a_n$, donc la suite de fonctions $(a_n F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur A. D'autre part, comme dans la question 1., on a

$$\forall z \in A,\ \ \forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1})F_k(z)| \leq M(a_k - a_{k+1}),$$

cet inégalité montre que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A, car la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k - a_{k+1})$ converge.

b) On remarque la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n$ converge simplement sur A (toujours d'après la question 1.), et que sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})F_n(z) + \lim_{n\to\infty} a_n F_n(z)$, donc on peut conclure que la convergence est uniforme sur A, car la suite et la série convergent uniformément sur A.

6. EXEMPLE

a) Il est clair que $1 - e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}}(e^{\frac{-ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}) = -2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}$. Pour la convergence uniforme il suffit d'appliquer le résultat de la question 5. (b), avec $A = [a, 2\pi - a]$ et $f_k(x) = \sin(kx)$, en effet, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) = \sin(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Donc

$$\forall x \in [a, 2\pi - a],\ \ \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Ce qui permet de conclure.

La continuité des applications $x \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ et la convergence uniforme sur $[a, 2\pi - a]$ montrent que l'application $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ est continue sur $[a, 2\pi - a]$ et ceci pour tout $a \in]0, \pi[$, donc elle est continue sur $]0, 2\pi]$.

b) Soit p un entier naturel fixé, on a :

$$\forall x \in]0, \pi],\ \ \left|\sum_{k=1}^{n} v_n(x)\right| = \left|\frac{\sin nx \sin px}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{|\sin px|}{\sin\frac{x}{2}} \leq \frac{px}{\frac{x}{\pi}} = p\pi$$

(on utilisé les inégalités $\sin px \leq px$ et $\frac{2}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right)$). L'inégalité se prolonge pour $x = 0$. Donc, une autre fois, par application du résultat de la question 5., la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$.

c) i. Notons $a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ptU(t)dt$ et $b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin ptU(t)dt$ les coefficients de Fourier de U. Par parité, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \ a_p = 0\ \text{ et }\ b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ptU(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)dt.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ étant uniformément convergente sur $[0,\pi]$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ b_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sin pt \sin nt dt = \frac{2}{\pi\sqrt{p}} \int_0^{\pi} \sin^2 pt = \frac{1}{\sqrt{p}}.$$

ii. Puisque U est 2π-périodique et supposée continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc on peut lui appliquer la formule de Parseval :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^2(t)dt.$$

D'où l'égalité contradictoire, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(t)dt < \infty$, car la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge. Donc l'hypothèse " U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ " est fausse.

Troisième partie
Convergence uniforme d'une série entière

7. Le lemme d'Abel montre que toute série entière de rayon de convergence $R > 0$ est uniformément convergente sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$.
8. a) Raisons par l'absurde, en supposant la série uniformément convergente sur $]-1,1[$, en particulier sur $[0,1[$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in [0,1[$ et $\forall n \geq p \geq n_0$, on a :

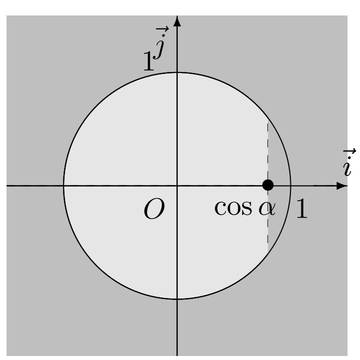
$$\sum_{k=p}^{n} \frac{x^k}{\sqrt{k}} < \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand x tend vers 1 par des valeurs inférieurs, on obtient

$$\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \varepsilon.$$

Ceci est absurde car la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

b)



Le domaine D_α

c) Les applications $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc D_α paraît comme intersection de deux fermés, donc c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Comme D_α est borné (partie de la boule unité), donc c'est un compact de $\mathbb{R}^2$, car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie.

d) Pour tout $z \in D_\alpha$, $z \neq 1$. Donc $F_n(z) = \dfrac{1 - z^n}{1 - z}$ et donc $|F_n(z)| \leq \dfrac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \dfrac{2}{|1 - z|}$. D'autre part, si $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2$. Mais $x \leq \cos\alpha < 1$, donc $|1 - z| \geq 1 - x \geq 1 - \cos\alpha$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in D_\alpha, \ |F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos\alpha}.$$

e) On est dans la situation de la question 5., en effet, la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z^k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément bornée sur D_α, donc on peut conclure : La série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tout partie de la forme D_α.

• • • • • • • • • • •