

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries de Fonctions

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ .

Mise à part la partie **III**, qui utilise des résultats de la partie **I**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t) dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*

(a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

(b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. *Lien avec ζ*

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x , de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*

- (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F , de la série produit $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

- (b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

7. *Cas où $x = 1$*

On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

- (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

- (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$.

- (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. *Développement asymptotique en 1*

- (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F , puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.
- (b) En déduire deux réels a et b , qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

(a) Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Justifier que, pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

(c) Exprimer, pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

(d) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

(e) En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. Application

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ , de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geq 1$. Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.

$\mathbb{R}[X]$ désigne la $\mathbb{R}$ -algèbre des polynômes à coefficients réels.

On identifie un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, B'_n = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

On admet qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n) . On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.

On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n -ième nombre de Bernoulli.

11. Calculer B_1 et B_2 . En déduire b_1 et b_2 .

12. Calculer, pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.

13. *Symétrie*

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

14. *Développement en série de Fourier*

Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

Justifier avec soin qu'il existe une unique suite de réels $(a_n(k))_{n \geq 0}$ telle que, pour tout réel x , on ait :

$$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

15. Expression des coefficients

(a) Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Montrer que l'on a :

$$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2} \left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) \right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).$$

- (b) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.
- (c) Conclure que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$, on a :

$$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

On remarquera pour la suite (sans le démontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. *Conclusion*

Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k} .

17. *Calcul effectif des b_n*

- (a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

- (b) En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés. Écrire, dans un des langages au programme, un petit algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_n pour un entier n donné.

Fin de l'énoncé

Corrigé du problème: autour de la fonction zeta alternée de Riemann

I Généralités

1. Pour $x > 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)$ décroît vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge par le critère spécial des séries alternées.

Pour $x \leq 0$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ne tend pas vers 0, ce qui montre la divergence grossière de la série.

Finalement, F est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Pour $t \in [0, 1[$, $g_n(t) = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ qui tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout n , g_n est continue sur $[0, 1[$ et est dominée par la fonction constante égale à 2 donc intégrable sur $[0, 1[$. Le théorème de convergence dominée permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(t) dt \\ \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \\ \ln 2 &= F(1). \end{aligned}$$

3. Pour $x \geq 2$, $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

converge donc normalement sur $[2, +\infty[$, et donc uniformément sur $[2, +\infty[$. Le théorème de la double limite s'applique, comme $F(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et que pour tout $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, on obtient que F a pour limite 1 en $+\infty$.

4. (a) On fixe $x > 0$ et on définit sur $[1, +\infty[$, $\phi : u \mapsto \frac{\ln u}{u^x}$. La fonction ϕ est dérivable et

$$\phi'(u) = \frac{(1 - x \ln u)}{u^{x+1}}$$

Cette dérivée est négative ou nulle pour $u \geq e^{1/x}$, ce qui prouve que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ est décroissante à partir du rang $E(e^{1/x}) + 1$.

- (b) Soit $a > 0$. Pour tout n , la fonction $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et a pour dérivée $x \mapsto \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$.

Comme la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)$ décroît à partir d'un certain rang et est de limite nulle (croissance comparée), la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ vérifie le critère spécial pour les séries alternées, en particulier son reste de rang n vérifie pour $x \in [a, +\infty[$ et pour $n \geq E(e^{1/a}) + 1$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ sur $[a, +\infty[$. Puisque de plus $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$; on a que F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$, ce qui permet de conclure.

5. *Lien avec ζ*

Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned} F(x) - \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} \\ &= -2^{1-x} \zeta(x) \end{aligned}$$

On en déduit bien que $F(x) = \zeta(x)(1 - 2^{1-x})$.

Quand x tend vers $+\infty$, $2^{1-x} = e^{(1-x) \ln 2}$ tend vers 0, donc $\frac{F(x)}{1-2^{1-x}} = \zeta(x)$ a la même limite que F , c'est à dire 1.

II Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6. *Étude de la convergence*

- (a) Pour $x > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est absolument convergente, comme le produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergent, la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente). On a de plus $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = (F(x))^2$.

(b) On a

$$c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k^x} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^x} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k(n-k))^x}.$$

Comme la fonction trinôme $k \mapsto k(n-k)$ a pour maximum $\frac{n^2}{4}$ atteint en $k = \frac{n}{2}$, on a

$$|c_n(x)| \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n^2/4)^x} = \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}.$$

Pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{n-1}{n^{2x}} \sim \frac{1}{n^{2x-1}}$. En particulier pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$ ne tend pas vers 0, ce qui empêche $|c_n(x)|$ de tendre vers 0 et donc prouve la divergence grossière de $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

7. Désormais on suppose que $x = 1$.

- (a) On a $\frac{1}{X(n-X)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{n-X} \right)$. Ainsi

$$c_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = \frac{2(-1)^n H_{n-1}}{n}.$$

(b) Posons $t_n = \frac{H_{n-1}}{n}$ pour $n \geq 2$. On a

$$t_{n+1} - t_n = \frac{nH_n - (n+1)H_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{1 - H_{n-1}}{n(n+1)} \leq 0,$$

ce qui prouve la décroissance de (t_n) .

(c) On sait que $H_n \sim \ln n$, on en déduit que $\frac{2H_{n-1}}{n} \sim \frac{2\ln(n-1)}{n}$ qui tend vers 0 par croissance comparée.

Comme on vient de voir que $\left(\frac{2H_{n-1}}{n}\right)$ est en plus décroissante, la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ est convergente par le critère spécial des séries alternées.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1.

8. Développement asymptotique en 1

(a) Puisque F est dérivable en 1, on a pour x au voisinage de 1 :

$$F(x) = F(1) + (x-1)F'(1) + o(x-1) = \ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1).$$

Comme $1-x$ est au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} 1 - 2^{1-x} &= 1 - e^{(1-x)\ln 2} \\ &= 1 - \left(1 + (1-x)\ln 2 + \frac{((1-x)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2) \right) \\ &= (x-1)\ln 2 - \frac{((x-1)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2). \end{aligned}$$

(b) On a ainsi

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{(x-1)\ln 2 - \frac{((x-1)\ln 2)^2}{2!} + o((x-1)^2)} \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \left(\frac{\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)}{1 - (x-1)\frac{\ln 2}{2} + o(x-1)} \right) \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} [\ln 2 + (x-1)F'(1) + o(x-1)] \left(1 + (x-1)\frac{\ln 2}{2} + o(x-1) \right) \\ &= \frac{1}{(x-1)\ln 2} \left(\ln 2 + (x-1)F'(1) + (x-1)\frac{(\ln 2)^2}{2} + o(x-1) \right) \\ \zeta(x) &= \frac{1}{(x-1)} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} \right) + o(1). \end{aligned}$$

9. Développement asymptotique en 1 (bis)

(a) Par la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t^x}$, on a

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x},$$

ce qui donne facilement l'encadrement souhaité.

(b) On a en sommant de $n = 1$ à N , l'encadrement de la question précédente

$$0 \leq \sum_{n=1}^N v_n(x) \leq 1 - \frac{1}{(M+1)^x} \leq 2,$$

ce qui prouve que la série $\sum_n v_n(x)$ est convergente puisque c'est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.

(c) Pour $x \in]1, 2]$ et $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{n=1}^N v_n(x) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^x} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} - \left[\frac{(N+1)^{1-x} - 1}{1-x} \right] \end{aligned}$$

puis en faisant tendre N vers l'infini, comme les deux termes de la somme de droite convergent, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}.$$

(d) Prenons x dans $[1, 2]$. En sommant de $n = N+1$ à M l'encadrement du départ, on a

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^M v_n(x) \leq \frac{1}{(N+1)^x} - \frac{1}{(M+1)^x},$$

ce qui donne en faisant tendre M vers l'infini,

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n(x) \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{N+1}.$$

Ce reste de rang N converge donc uniformément vers 0 sur $[1, 2]$, ce qui prouve que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$.

(e) Grâce à la convergence uniforme sur $[1, 2]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est continue en 1^+ , ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x),$$

ce qui donne en utilisant les questions précédentes

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right).$$

Cela permet de conclure que pour x au voisinage de 1^+ , on a

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*

On a donc obtenu deux développements asymptotiques (avec celui de la question 8) de ζ en 1^+ . L'unicité de la limite donne que $\gamma = \frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}$, on trouve alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma \right) \ln 2.$$

III Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli. Comme $B'_1 = B_0 = 1$, $B_1 = X + c$. De plus $\int_0^1 B_1 = \frac{1}{2} + c = 0$, ce qui donne $B_1 = X - \frac{1}{2}$. De même, on obtient $B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$. Il vient $b_1 = \frac{-1}{2}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$.

12. Pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n = \int_0^1 n B_{n-1} = n \underbrace{\int_0^1 B_{n-1}}_0 = 0$.

13. *Symétrie*

Considérons le polynôme $C_n = (-1)^n B_n(1 - X)$.

On a $C_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $C'_n = (-1)^n (-1) B'_n(1 - X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1 - X) = n C_{n-1}$.

Enfin, $\int_0^1 C_n = \int_0^1 (-1)^n B_n(1 - x) dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(u) du = 0$, par le changement de variable $u = 1 - x$. La suite de polynômes (C_n) vérifie donc les propriétés des polynômes de Bernoulli, par unicité on a $B_n = C_n$, ce qui donne $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.

14. *Développement en série de Fourier*

Soit k un entier naturel. L'application 2π -périodique g_k est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $g_k(2\pi) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = g_k(0)$ (c'est bien vrai pour $k = 0$ puisque $B_0 = 1$). Le théorème de convergence normale s'applique et g_k est limite simple sur $\mathbb{R}$ (il y a convergence normale, mais ce n'est pas utile ici) de sa série de Fourier. Il ne reste plus qu'à prouver que g_k est paire pour conclure.

Si $x \in [-\pi, 0]$,

$g_k(-x) = B_{2k}(\frac{-x}{2\pi}) = B_{2k}(1 + \frac{x}{2\pi}) = B_{2k}(\frac{2\pi+x}{2\pi}) = g_k(x + 2\pi) = g_k(x)$, l'avant dernière égalité découle du fait que $x + 2\pi \in [\pi, 2\pi]$.

15. *Expresion des coefficients*

- (a) Soit $n \geq 1$ et $k \geq 1$. On va effectuer deux intégrations par parties (IPP) successives. Pour la première, on posera $u = B_{2k}(\frac{t}{2\pi})$ et $v' = \cos(nt)$, pour la deuxième on posera $u = B_{2k-1}(\frac{t}{2\pi})$

et $v' = \sin(nt)$.

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cos(nt) \, dt \\
&\stackrel{IPP}{=} \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\left[B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{2\pi}}_0 - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} B'_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \frac{\sin(nt)}{n} \, dt \right) \\
&= \frac{-k}{n\pi^2} \int_0^{2\pi} B_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \sin(nt) \, dt \quad \text{car } B'_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) = 2k B_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \\
&\stackrel{IPP}{=} \frac{-k}{n\pi^2} \left(\left[B_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \frac{\cos nt}{-n} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} B'_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \frac{\cos(nt)}{-n} \, dt \right) \\
&= \frac{-k}{n\pi^2} \left(\frac{-1}{n} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) + \int_0^{2\pi} \frac{2k-1}{-2n\pi} B_{2k-2}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cos(nt) \, dt \right) \\
&= \frac{k}{(n\pi)^2} (B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 1$. On a

$$a_n(1) = \frac{1}{n^2\pi^2} \left(\underbrace{B_1(1) - B_1(0)}_1 \right) - \frac{1}{2n^2\pi^2} a_n(0).$$

Comme $a_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt \, dt = 0$ pour $n \geq 1$, on a

$$a_n(1) = \frac{1}{n^2\pi^2}.$$

(c) Soit $n \geq 1$ et $k \geq 2$. On a $2k-1 \geq 3$ d'où $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$.

Ainsi $a_n(k) = (2k)(2k-1) \frac{-1}{4n^2\pi^2} a_n(k-1)$. Une récurrence sur k immédiate donne alors

$$\begin{aligned}
a_n(k) &= \left(\frac{-1}{4n^2\pi^2} \right)^{k-1} \frac{(2k)!}{2} a_n(1) \\
&= \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}.
\end{aligned}$$

On remarque pour la suite que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. Conclusion

Soit $k \geq 1$. Comme $2k \geq 2$, on a $a_0(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \, dt = 0$.

L'égalité entre g_k et sa série de Fourier évaluée en $x = 0$, donne

$$g_k(0) = b_{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

ce qui donne

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} \pi^{2k} b_{2k}}{(2k)!}.$$

17. Calcul effectif des b_n

(a) La formule de Taylor appliquée au polynôme B_n de degré n donne

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Or $B_n^{(k)}(X) = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}(X)$, ce qui donne

$$\frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k} b_{n-k},$$

et permet de conclure.

(b) Avec $x = 1$, on obtient $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k}$, comme pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$, on obtient $b_n = b_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k}$ et donc $b_{n-1} = \frac{-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} b_{n-k}$. Finalement la suite (b_n) est définie par

$$b_0 = 1, \quad \forall n \geq 1, \quad b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Voici une petite procédure MAPLE donnant la valeur exacte des b_k :

```
> b[0] :=1 : for n to 10 do b[n] :=-1/(n+1)*sum(binomial(n+1,k)*b[k],k=0..n-1) ;
od ;
```

On trouve alors par exemple

$$b_{10} = \frac{5}{66},$$

et

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93\,555} \quad \text{et} \quad F(10) = \frac{73\pi^{10}}{6\,842\,880}.$$