ELBilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

PREPARATION CONCOURS

Suites de Fcts

Partie I / integrale de Gauss

① Mq $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ cvge

② Mq $f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

cvge simplt vers $f(t) = e^{-t^2}$ sur $[0, +\infty[$

③ Verifier que $|f_n(t)| \leq e^{-t^2}$ $\forall t \geq 0$

④ En deduire que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

indic : Cvgce dominée + W_n = Wallis $\sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Partie II — thm de Stone-Weierstrass : une demo

On se propose de mq si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue

Alors $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $P_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[0,1]$

① On pose $B_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ poly de Bernstein

(i) Vérifier que ⓐ $\sum_{k=0}^{n} B_k(x) = 1$

ⓑ $\sum_{k=0}^{n} k B_k(x) = nX$

ⓒ $\sum_{k=0}^{n} k^2 B_k(x) = n(n-1)X^2 + nX$

(ii) En déduire que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_k(x) = \frac{x(1-x)}{n}}$$

② Justifier que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)$ tq $\forall x, y \in [0,1]$

$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

③ Soit x fixé. On pose $I = \{ k \in [\![0,n]\!] \text{ tq } |x - \frac{k}{n}| < \alpha \}$

mq $S_1 = \sum_{k \in I} |f(x) - f(\frac{k}{n})| B_k(x) \leq \varepsilon/2$

4) Soit $x \in [0,1]$ fixé

on pose $J = \{ k \in [\![0,n]\!] \text{ tq } |x - \frac{k}{n}| > \alpha \}$

a) Mq $S_2 = \left| \sum_{k \in J} |f(x) - f(\frac{k}{n})| B_k(x) \right| < \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2 n^2} x(1-x)$

Rectifiez svp partout : n au lieu de n^2

b) On déduire que $S_2 < \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n^2}$

5) On pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) B_k(X) \in \mathbb{R}_n[X]$

i) Mq $\forall x \in [0,1]$ on a $|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n^2}$

ii) On déduire que $\boxed{P_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [0,1]}$

Stone-Weierstrass

6) Dire comment on peut Mq S.W sur $[a,b]$ en gle

7) Une application : On munit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ de $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

i) Mq $\mathbb{R}[X]^\perp = 0$

ii) On déduire $E \neq F \oplus F^\perp$

$F^{\perp\perp} \neq F$ où $F = \mathbb{R}[X]$

Partie III | thm de S. W : une autre demo

Soit $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ continue tq $f = 0$ hors de $[-1/2, 1/2]$

① Mq $a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \geq \frac{1}{n+1}$

indic : $\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \geqslant 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \, dt$

② On pose $f_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

i) Mq $\forall 0<\alpha<1$ on a : $0 \leq \int_{|t| \geqslant \alpha} f_n(t) \, dt \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$

ii) En deduire que $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geqslant \alpha} f_n(t) \, dt = 0$

③ On pose $P_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t) f(t) \, dt$ (produit de convolution $P_n = f_n * f$)

i) Mq $P_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f(x-t) \, dt = \int_{-1/2}^{1/2} f_n(t) f(x-t) \, dt$

$= \int_{-1/2}^{1/2} f_n(x-t) f(t) \, dt$

rectifier svp -1 au lieu de -1/2 et 1 au lieu de 1/2

ii) Justifier que $f_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n}$

$\forall x, t \in [-1/2, 1/2]$

④

(iii) En deduire que $P_n(x)$ est un polynome en x

(4) (i) Justifier que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)$ tq $\forall x, y \in [-1/2, 1/2]$

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$$

(ii) En deduire que

$$\boxed{\int_{|t|<\alpha} |f(x-t) - f(x)|\, f_n(t)\,dt < \varepsilon/2}$$

(5) (i) Mq $\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\alpha} |f(x-t) - f(x)|\, f_n(t)\,dt = 0$

(ii) En dedure que $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$

(6) Conclure que S.W est vrai sur $[-1/2, 1/2]$

(7) Dire comment Mq S.W est vrai sur $[a, b]$ en gle.

Partie IV / thms de Dini

① **Version 1** : Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues
tq $f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \quad \forall t \in [a,b]$
$f_n \xrightarrow{cs} f$ et f cont sur $[a,b]$
Alors la cvge est unif

② Soit $\varepsilon > 0$ fixé on pose $K_n = \{x \in [a,b]$ tq $|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$
Justifier que K_n ~~compact~~ fermé

i) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$ tq $K_n \neq \phi$

a) Justifier que $\exists\, x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)}$ tq $x_{\varphi(n)} \to x \in [a,b]$
avec $n \leq \varphi(n)$

b) En deduire que $f(x_{\varphi(n)}) - f_N(x_{\varphi(n)}) \geq \varepsilon$
pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé
$\forall \varphi(n) \geq N$

c) En deduire que $f(x) - f_N(x) \geq \varepsilon$

d) En deduire une contradiction puisque
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $K_{n_0} = \phi$

ii) En deduire que $\forall n \geq n_0$ on a $K_n = \phi$
indic : Mq $K_n \subset K_{n_0}$

iii) Conclure que $\boxed{f_n \xrightarrow{cu} f \text{ sur } [a,b]}$

③ **Application** : pour tout $t \in [0,1]$

on pose $\begin{cases} P_0(t) = 0 \\ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n^2(t)\right) \end{cases}$

Mq $P_n(t) \xrightarrow{cu} f(t) = \sqrt{t}$ sur $[0,1]$

④ **Version 2** : Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues

tq $f_n \xrightarrow{cs} f$ continue sur $[a,b]$

f_n croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$ Alors la cvge est unif

ⓘ Justifier que $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)$ tq $\forall x, y \in [a,b]$

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ⓘⓘ on pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ tq $\frac{b-a}{n} < \alpha \qquad 0 \leq k \leq n$

ⓐ Mq $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0 \quad \max\limits_{0 \leq k \leq n} |f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$

ⓑ Mq $\forall x \in [a,b]$, $\exists\, 0 \leq k \leq n-1$ tq $x_k \leq x \leq x_{k+1}$

en déduire que

$$f(x_k) - f_n(x_{k+1}) \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x_{k+1}) - f_n(x_k)$$

⑤ **Application** : Mq $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{cu} f(x) = e^x$

sur $[0,1]$

Partie V VARIOUS

① Soit $P_k(x) \in \mathbb{R}_n(x)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ fixe

on suppose que $P_k(x) \xrightarrow{CS} f(x)$ sur $I \subset \mathbb{R}$

ⓘ Mq $f(x) \in \mathbb{R}_n(x)$

indic : utiliser poly d'interpolation de Lagrange

ⓘⓘ Mq $P_k(x) \xrightarrow{CU} f(x)$ sur $\mathbb{R}$

même indic

② Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fct $\neq$ cte et bornée

ⓘ Mq $\forall P \in \mathbb{R}(x)$ tq $P \neq$ cte $\quad \|P - f\|_{\infty, \mathbb{R}} = +\infty$

indic $\big| \|P\|_\infty - \|f\|_\infty \big| \leq \|P - f\|_\infty$

ⓘⓘ En deduire que S.W n'est pas valable sur $\mathbb{R}$

FIN ET
BONNE CHANCE

5