PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA - LÉON L'AFRICAIN

Prépas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

Preparation Concours
Analyse

Series Et Integrales

Partie I : Les Outils Concours

1 Integrales de Wallis

on pose $\boxed{W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, dt}$

i) Mq $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}} \, dt$

ii) Mq $\boxed{W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

2 Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

on pose $x_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$

i) Mq x_n cvge vers $l > 0$

indic : Etudier la cvgce de $\sum \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$

ii) Mq $l = \sqrt{2\pi}$ indic : Etudier $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{x_n^2}{x_{2n}}\right)$

iii) Conclure

Scanné avec CamScanner

③ Integrale de Gauss : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Mq $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ cvge et ~~est~~ egal à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

indic : Etudier la cvgce de $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$ si $0\le t\le\sqrt{n}$

0 sinon

④ Lemme de Lebesgue

Mq $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0}$

$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt = 0$

$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,e^{i\lambda t}\,dt = 0$

pour toute fct $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$

⑤ Noyau de Dirichlet

on pose $\boxed{D_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)}$

ⓘ Verifier que $D_n(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2} - 1\right)$

$\forall t \notin 2\pi\mathbb{Z}$

ⓘⓘ En deduire que $\underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u}\,du}_{\text{justifier la cvgce de l'integrale}} = \pi/2$

6) Integrale de Dirichlet : $\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt}$

(i) Mq I est semi - cvge

(ii) Mq $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

(iii) En deduire que $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi/2}$

7) Formule d'Euler : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

(i) Trouver α, β tq $\frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt)\, dt$

(ii) En deduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt$

où $f(t) = \dfrac{t^2/2\pi - t}{2\sin(t/2)}$

(iii) En deduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Scanné avec CamScanner

8 Comparaison $\sum - \int$

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux décroissante et positive

1) Mq $\forall n \geq a$, $\forall m \geq a$ on a

$$\boxed{\int_{n-1}^{m} f(t)\,dt \leq \sum_{k=n}^{m} f(k) \leq \int_{n}^{m+1} f(t)\,dt}$$

2) En déduire que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\sum_{k \geq a} f(k)$ sont de même nature

Partie II / cte γ d'Euler

on pose $\boxed{\gamma_n = H_n - \ln(n+1)}$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1) Mq $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2) Mq $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cvge et que sa limite $\boxed{\gamma = \lim_{+\infty} \gamma_n \in (0,1)}$

3) En déduire que $\boxed{H_n = \gamma + \ln n + o(1)}$

4) Étudier la cvgce de $\sum_{k \geq 2} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right)$

5) Vérifier que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k}{k-1}\right) - \frac{1}{k} \right) = H_n - \ln n - \gamma$

6) En déduire que $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

Scanné avec CamScanner

7) Verifier que $\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right)+2\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]=\gamma-H_n+\ln n+\frac{1}{2n}$

8) En deduire que $\boxed{H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

9) Mq $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ cvge et que $I=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

où $a>0$, $b>0$ tq $a\leq b$

indic $e^{-bx}\ln\frac{b}{a}\leq\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\leq e^{-ax}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

10) En deduire que $\boxed{\gamma=\underbrace{\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt}_{\text{etudier la cvge d'abord}}}$

11) i) Mq $\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt$ cvge

ii) Mq $\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\ln\varepsilon+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt\right)=0$

iii) Verifier que $\gamma+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\int_0^\varepsilon e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)dt+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$

iv) En deduire que $\boxed{\gamma=-\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt}$

Scanné avec CamScanner

Partie III — Fct Gamma d'Euler

pour tout $x>0$, on pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

(1) Mq $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x>0$

(2) Mq l'app $x\longmapsto\Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$

donner $\Gamma^{(n)}(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x>0$

(3) (i) Vérifier que $\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$ pour tout $x>0$

(ii) En déduire que $\boxed{\Gamma(n)=(n-1)!}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

(4) (i) Calculer $\Gamma(1/2)$

(ii) En déduire $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

(5) (i) Mq $\Gamma(x)=\lim_{+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$

(ii) En déduire que $\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,dx$

(iii) Conclure que $\boxed{\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}}$

formule de Gauss

(iv) En déduire que $\boxed{\binom{n+m}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}n^m}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$ fixe

Scanné avec CamScanner

⑥ Mq $\boxed{\dfrac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(1+\dfrac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right] \quad \forall x>0}$

Formule de Weierstrass

Indic $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln n)$

⑦ Une application : $\boxed{\text{Mines 2019}}$

(i) Eq d'Airy : Mq l'eq $\boxed{\begin{cases} x''(t) = t\,x(t) \\ x(0)=1,\ x'(0)=0 \end{cases}}$

admet une sol unique f définie sur $\mathbb{R}$

(ii) Expliciter le DSE $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

(iii) Mq $a_{3n} \sim \dfrac{\Gamma(2/3)\, n^{1/3}}{9^n (n!)^2} \sim n^{-1/6} \dfrac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n} \dfrac{1}{(2n)!}$

(iv) En déduire une cte C à exprimer en fct de $\Gamma(2/3)$

tq $\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} C\, t^{-1/4} e^{\frac{2}{3} t^{3/2}}}$.

Scanné avec CamScanner

Partie IV / Fct Beta d'Euler

pour tout $x>0$, $y>0$ on pose

$$\boxed{B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

1. Mq $B(x,y)$ est bien definie pour tout $x>0$, $y>0$

2. Etablir que
   i. $B(x,y)=B(y,x)$
   ii. $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(y,x)$

3. En deduire que $B(x+1,y+1)=\dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y)$

4. Exprimer $B(n,m)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$

5. on suppose ds cette qst $x>1$, $y>1$
   i. Mq $B(x,y)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$
   ii. Mq $F(t)=\displaystyle\int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,du\le\Gamma(x+y)$
   iii. En deduire que $G(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}F((1+u)t)\,du$ est defini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
   iv. Exprimer $G'(t)$ en fct de $\Gamma(x)$, e^{-t} et t^{y-1}

6. En deduire que $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pour tout $x>0$, $y>0$

7. Retrouver autrement le resultat de qst 4

Scanné avec CamScanner

Partie V — Fct Digamma d'Euler

Pour tout $x>0$, on pose $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

① Mq la fct $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right)$

est bien defini et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$

donner $f'(x)$ pour tout $x>0$

② En deduire que $\boxed{\psi(x) = -\frac{1}{x} + \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \text{ pour tout } x>0}$

③ En deduire que $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma}$

④ Mq pour tout $n \geq 2$, on a $\boxed{\psi(n) = -\gamma + H_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

⑤ Une application en proba : $\boxed{\text{CCP 2016}}$

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right).$$

Scanné avec CamScanner

⑧ i) Mq $\dfrac{\partial B}{\partial y}(x,y) = B(x,y)\left(\psi(y) - \psi(x+y)\right)$

ii) En deduire que ψ est $\nearrow$

Partie VI / Fcts de Riemann

pour tout $x > 1$ on pose $\boxed{\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}$ dzeta

et pour $x > 0$, on pose $\boxed{\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}}$ Eta

1) Mq $x \mapsto \zeta(x)$ est bien defini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$

donner $\zeta^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x > 1$

2) Mq $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$

3) Mq $x \mapsto \eta(x)$ est bien defini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

4) Etablir que $\boxed{\eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)}$ pour tout $x > 0$

5) En deduire que $\boxed{\eta(1) = \ln 2}$

6) Mq $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \lambda + o(1)$ où λ = cte à exprimer en fct de $\eta'(1)$

Scanné avec CamScanner

7) (a) Mq $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\right)$ cvge unif sur $[1,2]$

et que $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}dt\right)=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}$

(ii) En deduire que $\boxed{\zeta(x)=\frac{1}{x-1}+\gamma+o(1)}$

8) En deduire que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}=\ln 2\left(\frac{\ln 2}{2}-\gamma\right)}$

9) App : DSE de $\psi(x)$ au vois de 1

(a) Mq $f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)$ est bien defini et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$

(ii) Exprimer $f^{(k)}(0)$ en fct de $\zeta(k+1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$

(iii) Mq f est DSE sur $]-1,1[$

(iv) Etablir que $\boxed{\psi(x+1)=\psi(1)+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n}$

(v) En deduire que $x\mapsto\psi(x)$ est DSE au vois de 1

exprimer $\psi^{(n)}(1)$ en fct de $\zeta(n+1)$

(vi) Que devient ce resultat pour $n=1$

FIN et BONNE CHANCE