El Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

PREPARATION
CONCOURS

Series de Fcts

Partie I / Fct Dzeta et Eta d'Euler

$\forall x \in \mathbb{R}$ on pose $\boxed{\begin{aligned} \zeta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ \eta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{aligned}}$

1) Mq $\zeta(x)$ est définie pour tout $x > 1$

2) a) Mq $\sum \frac{1}{n^x}$ CVN sur tout $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$

ii) en deduire que $x \mapsto \zeta(x)$ est continue sur $]1, +\infty[$

iii) En deduire $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = ?$

3) i) Mq $x \mapsto \zeta(x)$ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$

ii) Calculer $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $x > 1$

iii) En deduire que $x \mapsto \zeta(x)$ est $\searrow$ et convexe sur $]1, +\infty[$

4) i) Mq $\boxed{\zeta(x) \underset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}}$

ii) En deduire $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x)$

5) Mq $\eta(x)$ est bien définie pour tout $x>0$

6) a) Mq $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ CVN sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$

ii) En déduire que $x \mapsto \eta(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$

iii) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \eta(x)$

7) Mq $x \mapsto \eta(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$
et calculer $\eta^{(k)}(x)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$

8) a) Mq $\boxed{\eta(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x)}$ $\boxed{\forall x>1}$

ii) En déduire que $\boxed{\eta(1) = \ln 2}$

iii) En déduire que $\boxed{\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \left(\frac{\eta'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)}$

9) pour tout $x\in(1,2)$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt$

a) Mq $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$

ii) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ CU sur $(1,2]$

iii) Justifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$

iv) En déduire que $\boxed{\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)}$

où $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} H_n - \ln(n+1)$

v) En déduire $\eta'(1) = ?$

2.

Partie II / Fct Gamma d'Euler

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

1) Mq $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$

2) Vérifier que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$

3) Mq $x \longmapsto \Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$

et donne $\Gamma^{(n)}(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$

4) Mq $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt$

indic : cvg dominée

5) En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, dx}_{I_n(x)}$

6) Exprimer $I_n(x)$ en fct de n et x

indic : trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_n(x+1)$

7) En déduire que $\boxed{\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n!\, n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x+k)}}$ formule de Gauss

⑧ on pose $\gamma_n = H_n - \ln n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

et $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \gamma_n$

ⓘ Vérifier que $\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{x\gamma_n} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$

ⓘⓘ En déduire que $$\boxed{\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right]}$$

Formule de Weierstrass

Partie III / Fct Digamma d'Euler

pour tout $x > 0$, on pose $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

① Mq $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$ est bien défini

et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

donner $f'(x)$ pour tout $x > 0$

② Vérifier que $f(x) = -\ln\left(\Gamma(x)\, x\, e^{\gamma x}\right)$

③ En déduire que

$$\boxed{\psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \quad \forall x > 0}$$

④ En déduire que $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma}$

indic : prendre $x = 1$ dans qst 3

Scanné avec CamScanner

(5) (a) Mq $\boxed{\psi(n) = -\gamma + H_{n-1}}$ pour tout $n \geq 2$

indic : Calculer $\psi(x+1) - \psi(x)$

(b) En déduire que $\boxed{\psi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

(6) Une Application En proba : CCP 2016

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1) - \psi(n+1)\right).$$

Partie IV — Série de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux

on pose

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \\ a_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \\ b_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \end{aligned}}$$

Coefficients de Fourier

N.B $b_0(f) = 0$

et $\sum_{n\geq 0} \left(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)\right)$ la série de Fourier associé à f

et $S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)\right)$ la somme partielle associée

① Dire pourquoi dans la déf des coeff on peut prendre $\int_{-\pi}^{\pi}$ au lieu de $\int_0^{\pi}$

② En déduire que $a_n(f) = 0$ si f est impaire
$b_n(f) = 0$ si f est paire

③ <u>Lemme de Lebesgue</u> : $\boxed{\text{Mq } \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0}$

④ on suppose ici que f est continue et C^1 par morceaux

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\tilde{f}(x) = \frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2}$

ⓐ Justifier que $\tilde{f}$ est 2π periodique et C. morceaux

ⓑ Verifier que $S_n(\tilde{f}) = S_n(f)'$

⑤ En deduire que $S_n(f') = S_n(f)'$ qd f est derivable et f' C. morceaux

⑥ Verifier que $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt}$

où $\boxed{c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}}$

⑦ Verifier que $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos \frac{nt}{2} \cos(\frac{n+1}{2})t}{\sin(t/2)}$

$\sum_{k=0}^{n} \sin(kt) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{(n+1)}{2} t}{\sin t/2}$

⑧ En deduire que $S_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} dx$

⑨ On pose $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f)$

Mq $\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin^2((\frac{n+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx$

(10) On suppose ici que f est continue

(i) Justifier que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

(ii) Justifier que

$$\sigma_n(f)(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t-x) - f(t)\right) \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}\right)x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \, dx$$

(iii) On deduire que

$$\left|\sigma_n(f)(t) - f(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\|f\|_\infty}{(n+1)\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

(11) On deduire ce resultat : Stone Weierstrass (Version 2)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ 2π - periodique et continue

Alors $\exists f_n$ fct trigonometrique de la forme

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \cos kt)$$

tq $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $\mathbb{R}$

FIN ET BONNE CHANCE