

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Séries de Fonctions

Séries de Fourier

I Analyse harmonique

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodiques continues par morceaux ($T > 0$)

On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$

A) Moyenne

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux T -périodique.

Alors la quantité $\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$ est indépendante de $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

On l'appelle valeur moyenne de f sur une période.

Démonstration :

$$\text{On a } \int_a^{a+T} f = \int_a^0 f + \int_0^T f + \int_T^{a+T} f$$

$$\text{Or, } \int_T^{a+T} f = \int_T^{a+T} f(t-T) dt = \int_0^a f(u) du$$

$$\text{Donc il nous reste } \int_a^{a+T} f = \int_0^T f.$$

B) Coefficients et série de Fourier de f .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux T -périodique.

- Coefficients complexes :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{Z}, \text{ on pose } c_n(f) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{-i\omega nt} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{\frac{-2i\pi}{T} nt} f(t) dt$$

- Série de Fourier de f :

C'est la série de terme général u_n où

$$\forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = c_0(f)$$

$$\text{Et pour } n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = c_n(f) e^{in\omega x} + c_{-n}(f) e^{-in\omega x}$$

De sorte que la n -ième somme partielle de f en $x \in \mathbb{R}$ est :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\omega x}$$

Attention :

Pour la série de Fourier, on utilise la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ et pas $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{\frac{2ik\pi}{T} x}$

(Les séries peuvent diverger)

- Forme trigonométrique :

On pose $a_0(f) = c_0(f)$: moyenne de f .

$$\text{Et pour } n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi \cdot nt}{T}\right) dt, b_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi \cdot nt}{T}\right) dt$$

- Relation :

Théorème :

On a $a_0(f) = c_0(f)$

Pour $n \geq 1$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, c_n(f)e^{in\omega x} + c_{-n}(f)e^{-in\omega x} = a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)$$

Et donc $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$, $b_n(f) = ic_n(f) - ic_{-n}(f)$

$$\text{Ou } c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)), c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f))$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire les coefficients sous forme intégrale.

Autre écriture de la série de Fourier :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$$

C) Symétries

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux T -périodique.

Morale :

Les symétries de f se retrouvent sur sa série de Fourier :

Théorème :

(1) Si f est réelle, alors $a_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$.

Ou $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$

(2) Si f est paire, on a $\forall n \geq 1, b_n(f) = 0$

$$\text{Et } a_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \text{ et pour } n \geq 1, a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$

Si f est impaire, on a $\forall n \geq 0, a_n(f) = 0$

$$\text{Et } \forall n \geq 1, b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt$$

Démonstration :

Le premier point est clair. Pour le deuxième :

Si f est paire, $t \mapsto f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire donc $b_n(f) = 0$

Et $t \mapsto f(t)\cos(n\omega t)$ est paire, donc pour $n \geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

C'est la même chose pour f impaire.

Théorème : coefficients de Fourier d'une dérivée

On suppose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique, C^1 par morceaux et continue.

$$\text{On pose } g(x) = \begin{cases} f'(x) \text{ si } f \text{ est dérivable en } x \\ \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} (f'(x+h) + f'(x-h)) \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors g est continue par morceaux, T -périodique et on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = in\omega c_n(f)$$

Autrement dit, pour tout n , $S_n(f)' = S_n(g) (= S_n(f'))$ si f est dérivable)

Rappel :

Comme f est supposée C^1 par morceaux, f' a une limite à droite et à gauche en tout point.

Démonstration :

(1) Si f est de classe C^1 :

Alors $g = f'$, et :

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \underbrace{\left[f(t) e^{-in\omega t} \right]_0^T}_{=0} - \frac{1}{T} \int_0^T (-in\omega) f(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= in\omega c_n(f) \end{aligned}$$

(2) Si f est C^1 par morceaux :

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f et g soient définis et continus en a .

On note $a_0 = a < a_1 \dots < a_p = a + T$ les points où f n'est éventuellement pas dérivable.

$$\text{Alors } T.c_n(g) = \int_a^{a+T} g(t) e^{-in\omega t} dt = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} g(t) e^{-in\omega t} dt$$

NB : $f|_{[a_j, a_{j+1}]}$ est de classe C^1 car f est continue sur $[a_j, a_{j+1}]$ et f' a des limites en a_j et a_{j+1} .

Comme $g|_{[a_j, a_{j+1}]}$ coïncide avec $(f|_{[a_j, a_{j+1}]})'$ sauf peut-être en a_j ou en a_{j+1} , on peut faire l'intégration par partie et :

$$T.c_n(g) = \sum_{j=0}^{p-1} \left[f(t) e^{-in\omega t} \right]_{a_j}^{a_{j+1}} + in\omega \sum_{j=0}^{p-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) e^{-in\omega t} dt = in\omega T.c_n(f)$$

D'où le résultat.

D) Lemme de Riemann–Lebesgue

Théorème :

Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \int_0^T f(t) e^{in\omega t} dt = 0$

Corollaire :

Si f est continue par morceaux et T -périodique, alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0$

Démonstration :

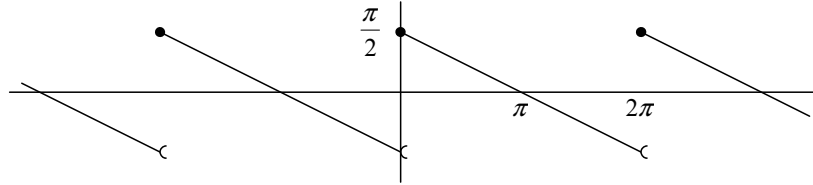
Déjà vu.

E) Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique définie par $\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

Quelle est la série de Fourier de f ?

Etudier la convergence de cette série et calculer sa somme.



Si on pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \not\equiv 0 [2\pi] \\ 0 & \text{si } x \equiv 0 [2\pi] \end{cases}$

Alors $\tilde{f}$ est impaire, et $\tilde{f}$ et f ont les mêmes coefficients de Fourier.

Donc les a_n sont nuls pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $T = 2\pi$, donc $\omega = 1$

$$\text{Et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2} \sin(nt) dt$$

Soit en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \pi b_n(f) &= \left[-\cos(nt) \frac{\pi - t}{2n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nt) dt}_{=0} \\ &= \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{n}$$

$$\text{Et } S(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Calcul de $S(f)$:

Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, $S(f) = 0$

Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\text{On a } \frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 \sin(nx) t^{n-1} dt \\ &= \text{Im} \left(\int_0^1 \sum_{n=1}^N t^{n-1} e^{-inx} dt \right) = \text{Im} \left(\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} (1 - t^N e^{iNx}) dt \right) \\ &= \text{Im} \left(\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt - r_N \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Im} \left(\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1 - te^{ix}} dt \right) \end{aligned}$$

$$\text{Où } |r_N| \leq \int_0^1 \frac{t^N}{|1 - te^{ix}|} dt \leq \frac{M}{n+1} \rightarrow 0, \text{ avec } M \text{ tel que } \forall t \in [0, 1], \frac{1}{|1 - te^{ix}|} \leq M$$

Et on a de plus $\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = -\int_0^1 \frac{dt}{t-e^{-ix}} = \ln(2 \sin \frac{x}{2}) + i \frac{\pi-x}{2}$
 Donc $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ pour $x \in]0, 2\pi[$

II Un espace préhilbertien

A) Espace des fonctions continues 2π -périodiques

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π -périodiques.

- Structure :

Théorème :

$C_{2\pi}$ est une sous-algèbre de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ munie de $+, \cdot, \times$

Remarque :

On a un autre opérateur : la convolution dans $C_{2\pi}$:

Pour $f, g \in C_{2\pi}$, on pose $f * g$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

On a vu que $*$ est une loi de composition interne, bilinéaire, commutative, associative dans $C_{2\pi}$.

- Produit scalaire :

Théorème :

L'application $(f, g) \in C_{2\pi}^2 \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt$ est un produit scalaire

sur $C_{2\pi}$

Mais $C_{2\pi}$ n'est pas complet pour la norme $\| \cdot \|_2$ associée à ce produit scalaire.

B) Des systèmes orthogonaux

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit l'application e_n par $\forall t \in \mathbb{R}, e_n(t) = e^{in.t}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}, c_n(t) = \cos(nt)$

Et pour $n \geq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}, s_n(t) = \sin(nt)$

Alors toutes les application introduites sont dans $C_{2\pi}$.

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale

Et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthogonale, avec $\forall n \geq 1, \|c_n\|_2 = \|s_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\|c_0\|_2 = 1$

En effet :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in.t} e^{im.t} dt = \delta_{n,m} \text{ pour } m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Et pour } n \geq 1, \|c_n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \frac{1}{2}$$

C) Polynômes trigonométriques

Propriété :

Les familles $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(c_p, s_q)_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ q \in \mathbb{N}^*}}$ sont libres.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $\text{Vect}(e_n, |n| \leq N) = \text{Vect}(c_p, s_q, 0 \leq p \leq N, 1 \leq q \leq N)$

Démonstration :

Les familles sont libres car orthogonales et aucun vecteur n'est nul.

L'égalité résulte de formules de trigonométrie.

On pose alors $T_N = \text{Vect}(e_n, |n| \leq N)$, et $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_N$

Définition :

Un élément de T s'appelle polynôme trigonométrique.

Si $P \in T \setminus \{0\}$, on appelle degré de P le plus petit entier N tel que $P \in T_N$.

Théorème :

T est le sous-espace de $C_{2\pi}$ engendré par $C_{2\pi}$ ou par $(c_p, s_q)_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ q \in \mathbb{N}^*}}$

De plus, $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de T , et $(c_p, s_q)_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ q \in \mathbb{N}^*}}$ une base orthogonale.

On a donc un filtre de sous-espaces de $C_{2\pi}$ (pas tout à fait un drapeau, la dimension augmente de 2) : $T_0 = \mathbb{C}e_0 \subset T_1 \dots \subset T \subset C_{2\pi}$

Exemples :

- Noyau de Dirichlet :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k \in T_n$

Formule : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(t) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)}$

Et $\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}, D_N(t) = 2N+1$

Démonstration :

Si $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D_N(t) &= e^{-iNt} \sum_{j=0}^{2N} e^{ij.t} = e^{-in.t} \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= e^{-i(N+\frac{1}{2})t} \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})t} - e^{i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} \end{aligned}$$

- Noyau de Féjer :

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{D_0 + \dots + D_n}{n+1} \in T_n$.

Formule : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}t}{\sin \frac{1}{2}t} \right)^2 \geq 0$

Et $\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}, F_n(t) = n+1$

Démonstration :

Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $F_n(t) = \frac{1}{n+1}(1+3+\dots+(2n+1))$ et on montre par récurrence que $(1+3+\dots+(2n+1)) = (n+1)^2$, d'où l'expression.

$$\text{Sinon : } (n+1)F_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n \frac{e^{i(k+\frac{1}{2})t}}{\sin \frac{t}{2}} \right)$$

$$\text{Et } (n+1)\sin \frac{t}{2} F_n(t) = \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(k+\frac{1}{2})t} \right) = \text{Im} \left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{-2i \sin \frac{t}{2}} \right) = \frac{1-\cos((n+1)t)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

D'où la formule.

D) Interprétation géométrique des séries de Fourier

Théorème :

Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur T_n .

$$\text{En particulier, } \|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$$

Démonstration :

Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$.

$$\text{On a pour tout } n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in.t} f(t) dt = \langle e_n, f \rangle$$

$$\text{Donc } S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k = \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k$$

Comme $\{e_k, |k| \leq n\}$ est une base orthonormale de T_n , $S_n(f)$ est bien la projection orthogonale de f sur T_n .

De plus, $f - S_n(f)$ et $S_n(f)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore, $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$

Et comme de plus $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ où $\{e_k, |k| \leq n\}$ est orthonormale, on a bien

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

Corollaire :

Pour tout $f \in C_{2\pi}$, la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable, c'est-à-dire que la série de terme général $|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$ converge, et on a l'inégalité de Bessel :

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

(On verra qu'il y a en fait égalité)

Démonstration :

Découle du théorème.

E) Un peu d'analyse fonctionnelle

- Théorème (de convergence normale de Dirichlet) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, C^1 par morceaux et continue, 2π -périodique.

Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f , c'est-à-dire :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = f(x)$ et la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable

(c'est-à-dire que la série de terme général $|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ converge)

Démonstration :

La famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

En effet :

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

Pour $x \in \mathbb{R}$, si f est dérivable en x , $g(x) = f'(x)$

Sinon, $g(x) = \frac{1}{2}(f'_d(x) + f'_g(x))$

NB : comme f est partout continue et C^1 par morceaux, f'_d et f'_g existent en tout point.

On a $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(g) = in.c_n(f)$ (déjà vu)

Donc pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| &= \frac{1}{n} (|c_n(g)| + |c_{-n}(g)|) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(g)|^2 + \frac{1}{n^2} + |c_{-n}(g)|^2 \right) \end{aligned}$$

($\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$)

Reste à montrer que l'inégalité de Bessel s'applique à g (qui n'est pas continue) :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(g) = \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k$ vérifie $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{S_n(g)(x)} (g - S_n(g))(x) dx = 0$.

En effet, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{S_n(g)(x)} h(x) dx = \sum_{k=-n}^n \overline{c_n(g)} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} h(x) dx$

$$\text{Et } \int_0^{2\pi} e^{-ikx} h(x) dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx}_{2\pi \times c_k(g)} - \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} S_n(g)(x) dx}_{2\pi \times c_k(g)} = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t) - S_n(g)(t) + S_n(g)(t)|^2 dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t) - S_n(g)(t)|^2 dt}_{\geq 0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(g)(t)|^2 dt \\ &\geq \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \end{aligned}$$

Donc la famille est bien sommable et on a encore l'inégalité.

Montrons maintenant la limite :

Lemme :

$$\text{Pour tous } x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}, S_n(f)(x) = (D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) f(x-t) dt$$

En effet,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_a^{a+2\pi} e^{-ikt} f(t) dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} D_n(x-t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} D_n(t) f(x-t) dt \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt - f(x)$$

$$\text{Or, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1$$

$$\text{Donc } S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) (f(x+u) - f(x)) du$$

$$\text{Et aussi } S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-u) (f(x-u) - f(x)) du$$

Mais comme D_n est pair,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) (f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)) du \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin \frac{u}{2}} (f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)) du \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+\frac{1}{2})u) \varphi_x(u) du \end{aligned}$$

$$\text{Où } \varphi_x(u) = \begin{cases} \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)}{\sin \frac{u}{2}} & \text{si } u \neq 0 \\ 2(f'_d(x) - f'_g(x)) & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\varphi_x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue ($\sin \frac{u}{2} \sim \frac{u}{2}$)

Et d'après le lemme de Riemann Lebesgue, $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda u} \varphi_x(u) du = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) - f(x) = 0$

• Théorème de Féjer (Hors-programme) :

NB : il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues, 2π -périodiques telles que la série de terme général $S_n(f)(0)$ diverge. (voir compléments à la fin du cours)

Théorème :

Pour $f \in C_{2\pi}$, la suite de terme général $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

Lemme :

Pour tous $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f) = F_n * f$.

$$\text{En effet : } \sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k * f = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k \right) * f$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, du fait que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) dt \end{aligned}$$

On introduit le module de continuité uniforme ω de f :

Pour $\delta \geq 0$, on note $\omega(\delta) = \{ |f(x) - f(y)|, |x - y| \leq \delta \}$.

Comme f est bornée et continue, 2π -périodique, ω est défini et continu en 0.

Ainsi, ω vérifie $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

Soit δ tel que $0 \leq \delta < \pi$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt \end{aligned}$$

Mais F_n est positive (on l'avait vu pour le calcul de son expression)

Pour la première intégrale, comme $|t| \leq \delta$, on a $|f(x-t) - f(x)| \leq \omega(\delta)$

Pour les autres, $|f(x-t) - f(x)| \leq 2\|f\|_{\infty}$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \omega(\delta) \int_{-\delta}^{\delta} F_n(t) dt + \frac{\|f\|_{\infty}}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \omega(\delta) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt}_{2\pi} \\ &\quad + \frac{\|f\|_{\infty}}{(n+1)\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)} dt + \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{\sin^2(\frac{1}{2}t)} dt \right) \\ &\leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_{\infty}}{(n+1)\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)} dt + \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\delta)} dt \right) \\ &\leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{(n+1)\sin^2(\frac{1}{2}\delta)} \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout δ tel que $0 \leq \delta < \pi$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on peut prendre $\delta = n^{-1/3}$

$$\text{Et alors } \|\sigma_n(f) - f\|_{\infty} \leq \omega(n^{-1/3}) + \frac{2\|f\|_{\infty}}{(n+1)\sin^2(\frac{n^{-1/3}}{2})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

F) Théorème de Parseval

Théorème :

Pour tout couple (f, g) d'éléments de $C_{2\pi}$, la famille $(\overline{c_n(f)}c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} \bar{f}(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle$

C'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)}c_k(g) = \langle f, g \rangle$

En particulier, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Remarque (Hors programme) :

Soit E un espace préhilbertien, (F_n) une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces de E de dimension finie. Pour $V \in E$, on considère la suite des projections orthogonales $p_{F_n}(V)$ de V sur F_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors : $\|V\|^2 = \|p_{F_n}(V)\|^2 + \|V - p_{F_n}(V)\|^2$

Et on a les équivalences :

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_{F_n}(V)\|^2 = \|V\|^2 \text{ (égalité de Parseval)}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|V - p_{F_n}(V)\|^2 = 0$$

$$(3) V \in \overline{G} \text{ où } G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

En effet :

(2) $\Leftrightarrow$ (1) découle de l'égalité de Pythagore.

(2) $\Rightarrow$ (3) : si $\|V - p_{F_n}(V)\| \rightarrow 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{F_n}(V) = V$

Et $\forall n \in \mathbb{N}, p_{F_n}(V) \in F_n \subset G$. Donc V est limite d'une suite d'éléments de G , donc est adhérent à G .

(3) $\Rightarrow$ (2) :

Si $V \in \overline{G}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ tel que $\|V - g\| \leq \varepsilon$

Donc g est dans l'un des F_n , disons F_N pour $N \in \mathbb{N}$

Alors $\|V - p_{F_N}(V)\| \leq \|V - g\| \leq \varepsilon$

Or, $(\|V - p_{F_n}(V)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $F_n \subset F_{n+1}$.

Donc $\forall n \geq N, \|V - p_{F_n}(V)\| \leq \varepsilon$, ce qui montre la limite voulue.

On voit de plus que l'égalité de Parseval est vraie pour tout $V \in E$ si et seulement si $\overline{G} = E$.

Théorème :

L'espace T est dense dans $C_{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$.

Démonstrations :

Pour $f \in C_{2\pi}$, la suite $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} (S_0(f) + \dots + S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f .

Comme tous les $\sigma_n(f)$ sont dans T , il en résulte que T est dense dans $C_{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour $h \in C_{2\pi}$, on a de plus $\|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$.

Donc $\sigma_n(f)$ tend aussi vers f pour $\|\cdot\|_2$, et T est aussi dense dans $C_{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_2$.

Application :

Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(f) \in T_n$.

Donc $\|f - S_n(f)\|_2 = d(f, T_n) \leq \|f - \sigma_n(f)\|_2$

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

D'où l'égalité de Parseval :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|f\|_2^2 - \|f - S_n(f)\|_2^2) = \|f\|_2^2$$

Cas de deux fonctions :

Soient $f, g \in C_{2\pi}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\overline{c_n(f)}c_n(g)| \leq \frac{1}{2}(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2)$

Donc la série de terme général $\overline{c_n(f)}c_n(g)$ et celle de terme général $\overline{c_{-n}(f)}c_{-n}(g)$ convergent absolument.

Calcul de la somme :

On a

$$\begin{aligned} \langle f, S_n(g) \rangle &= \langle f, \sum_{k=-n}^n c_k(g)e_k \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k(g) \langle f, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k(g) \overline{\langle e_k, f \rangle} = \sum_{k=-n}^n c_k(g) \overline{c_k(f)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \left| \langle f, g \rangle - \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)}c_k(g) \right| = |\langle f, g - S_n(g) \rangle| \leq \|f\|_2 \|g - S_n(g)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

III Théorèmes fondamentaux

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique, continue par morceaux.

A) Divergence de la série de Fourier

Théorème :

Il existe des fonctions *continues* telles que $(S_n(f)(0))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

L'ensemble de ces fonctions est même une intersection dénombrable d'ouverts, dense dans $C_{2\pi}$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration :

$(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ est une algèbre de Banach (une fonction continue 2π -périodique est bornée). On considère alors les formes linéaires $l_n : f \in C_{2\pi} \mapsto l_n(f) = S_n(f)(0) \in \mathbb{C}$.

En considérant le noyau de Dirichlet (pair), on a la formule :

$$l_n(f) = S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt$$

Alors l_n est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt$

En effet, la continuité de l_n et la majoration de sa norme triple sont évidents ; pour l'égalité : il faudrait une fonction continue prenant les valeurs ± 1 et ayant le même signe que D_n , ce qui est impossible. Pour obtenir l'égalité, on prend une suite de fonctions continues affines par morceaux $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ayant le même signe que D_n et valant ± 1 sauf sur un voisinage des zéros de D_n (en nombre fini). Ainsi, on aura l'égalité à ε près pour tout $\varepsilon > 0$, et donc l'égalité.

($\|l_n\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt$ s'appelle constante de Lebesgue)

Montrons maintenant que $\|l_n\|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$:

On a $\|l_n\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{\sin \frac{t}{2}} dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$

Et donc $\|l_n\| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \rightarrow +\infty$.

On applique ensuite le théorème de Banach–Steinhaus :

Comme $C_{2\pi}$ est complet pour $\|\cdot\|_\infty$, si $(l_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ était bornée pour tout $f \in C_{2\pi}$, alors $(\|l_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ serait aussi bornée, ce qui n'est pas le cas.

Il existe donc $f \in C_{2\pi}$ telle que $(S_n(f)(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée, et par là non convergente.

Quant à la densité de l'ensemble de ces fonctions, elle résulte du même théorème de Banach–Steinhaus.

B) Les théorèmes de Dirichlet

Théorème (convergence simple) :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique et C^1 par morceaux.

Alors la série de Fourier $c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f) e^{in\omega x} + c_{-n}(f) e^{-in\omega x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

Si f est continue en x , $g(x) = f(x)$

Sinon, $g(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

Remarque :

Si f est continue, $g = f$.

Plus généralement, si f est à sauts symétriques, c'est-à-dire si en tout point on a $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, alors $S_n(f)$ converge simplement vers f .

Théorème :

Sous les mêmes hypothèses, si de plus f est continue, alors la convergence de la série est normale.

Démonstration :

Par changement de variable affine, on ramène le cas T -périodique à 2π -périodique :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique continue par morceaux.

Alors, en faisant le changement de variable $u = \omega t$:

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{u}{\omega}\right) e^{-inu} du = c_n(g)$$

où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceaux 2π -périodique, est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

Pour $T = 2\pi$, le deuxième théorème est déjà vu.

Pour le premier :

On reprend les formules donnant $S_n(f)(x)$:

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+u) D_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \end{aligned}$$

$$\text{Où } \varphi_x(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x^+) + f(x-t) - f(x^-)}{\sin \frac{t}{2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 2(f'(x^+) - f'(x^-)) & \text{si } t = 0 \end{cases}, \text{ continue par morceaux.}$$

Ainsi, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $\int_0^{\pi} \varphi_x(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Et donc $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$

Autre démonstration :

- En $x = 0$:

Si f est C^1 par morceaux, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(0) = \frac{1}{2}(f(0^+) + f(0^-))$.

En effet, si f est continue, on a déjà vu

Pour f_0 2π -périodique telle que $f_0(x) = \frac{\pi-x}{2}$ si $x \in]0, 2\pi[$ et $f_0(x) = 0$ si $x = 0$

on a vu que la série de Fourier est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ et qu'elle converge simplement vers f_0 sur $\mathbb{R}$.

On a ensuite le résultat pour toute fonction C^1 par morceaux par linéarité.

- Puis on fait un décalage pour $x \in \mathbb{R}$.

C) Formules de Parseval

Théorème :

Soit $T > 0$, $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux et T -périodiques.

Alors la famille $(\overline{c_n(f)}c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \bar{f}(t)g(t)dt$$

En particulier, pour $f = g$, les familles suivantes sont sommables et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(t)|^2 dt$$

Démonstration :

On se ramène ici encore à $T = 2\pi$ de la même façon.

Le résultat a été vu pour f et g continus.

On considère l'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions continues par morceaux 2π -périodiques à sauts symétriques.

$$\text{On munit alors } \mathcal{D} \text{ de } \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}g.$$

Alors $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{D}$.

Et $C_{2\pi}$ est dense dans $\mathcal{D}$ pour la norme $\| \cdot \|_2$ associée à ce produit scalaire.

En effet :

Pour le caractère défini positif : (les autres sont clairs)

Soit $f \in \mathcal{D}$, supposons que $\langle f, f \rangle = 0$

$$\text{Alors } \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$$

Donc $|f(t)|^2$ est nulle en tout point de continuité.

Soient $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_p = 2\pi$ les discontinuités éventuelles de f .

Alors f est nulle sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout $i \leq p-1$ et sur $]a_p, a_1 + 2\pi[$.

Donc pour tout $i \geq 1$, $f(a_i^+) = f(a_i^-) = 0$, c'est-à-dire $f(a_i) = 0$.

Donc f est nulle

(Remarque : si on avait supposé f seulement continue par morceaux, le résultat est faux)

Soit maintenant $f \in \mathcal{D}$ avec une seule discontinuité $a \in]0, 2\pi[$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, on note φ_n coïncidant avec f sur $[0, 2\pi] \setminus]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ et affine sur $[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$.

$$\text{On a ainsi } \|\varphi_n - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} |\varphi_n(t) - f(t)|^2 dt$$

Or, f est bornée (car continue par morceaux) sur $[0, 2\pi]$ et $\forall t \in [0, 2\pi], |\varphi_n(t)| \leq \|f\|_\infty$.

$$\text{Donc } \|\varphi_n - f\|_2^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} 4\|f\|_\infty^2 dt = \frac{2\|f\|_\infty^2}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'où la densité de $C_{2\pi}$ dans $\mathcal{D}$. (on fait ensuite par linéarité pour f ayant plusieurs points de discontinuité)

Montrons maintenant la formule de Parseval sur $\mathbb{D}$.

Posons $A(f, g) = \langle f, g \rangle$ et $B(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$ pour $f, g \in \mathbb{D}$.

Déjà, A est sesquilinéaire continue sur $\mathbb{D}^2$.

Pour B :

Déjà, B est défini car d'après l'inégalité de Bessel (dont on a vu qu'elle est valable pour des fonctions continues par morceaux), $(|c_n(f)|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(|c_n(g)|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont sommables, et on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|\overline{c_n(f)} c_n(g)| \leq \frac{1}{2}(|c_n(g)|^2 + |c_n(f)|^2)$

Donc $(\overline{c_n(f)} c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et B est bien définie.

De plus B est sesquilinéaire, continue pour $\|\cdot\|_2$:

On a en effet, d'après une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{k=-N}^N \overline{c_k(f)} c_k(g) \right| \leq \left(\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=-N}^N |c_k(g)|^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{Puis avec l'inégalité de Bessel } \left| \sum_{k=-N}^N \overline{c_k(f)} c_k(g) \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

Donc par passage à la limite $|B(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$

D'où la continuité de B . Ainsi, A et B sont continues sur $\mathbb{D}^2$, égales sur $C_{2\pi}^2$ dense dans $\mathbb{D}^2$, donc égales partout.

Cas des fonctions continues par morceaux à sauts quelconques :

Lemme :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux 2π -périodique ; alors il existe $\tilde{f} \in \mathbb{D}$ tel que $f = \tilde{f}$ sur $[0, 2\pi]$ sauf en un nombre fini de points.

En effet :

Il suffit de prendre $\tilde{f}(x) = f(x)$ si f est continue en x

Et $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ sinon.

Pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux 2π -périodiques, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(\tilde{f}) \text{ et } \|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2$$

Donc comme la formule de Parseval est vraie pour $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$, elle l'est pour f et g .

IV Exercices et compléments

A) Fonctions à variation bornée

- Généralités :

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est dite à variation bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = b, \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq M$$

On pose alors $V_f([a, b]) = \sup_{a=a_0 < \dots < a_p=b} \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$, variation totale de f sur $[a, b]$.

Propriétés :

(1) L'ensemble des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ à variation bornée est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{C})$

(2) Soit $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ et $b \in [a, c]$.

Si f est à variation bornée sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors elle est à variation bornée sur $[a, c]$ et $V_f([a, c]) = V_f([a, b]) + V_f([b, c])$

(3) Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors elle est à variation bornée.

(4) Une fonction lipschitzienne ou monotone sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$.

Démonstration :

Déjà, c'est un espace vectoriel...

Supposons f à variation bornée sur $[a, b]$ et $[b, c]$.

Si $a = b$ ou $b = c$, le résultat est clair. Sinon :

Soient $a = a_0 < a_1 < \dots < a_p = c$ des réels.

On note k tel que $a_k \leq b$ et $a_{k+1} > b$.

Alors $\sum_{i=0}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(b) - f(a_k)| \leq V_f([a, b])$ (vrai encore si $b = a_k$)

Et $\sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_{k+1}) - f(b)| \leq V_f([b, c])$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| &= \sum_{i=1}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + \sum_{i=k+1}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \\ &\quad + |f(a_{k+1}) - f(b)| + |f(b) - f(a_k)| \\ &\leq V_f([a, b]) + V_f([b, c]) \end{aligned}$$

Donc f est à variation bornée sur $[a, c]$ et déjà $V_f([a, c]) \leq V_f([a, b]) + V_f([b, c])$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $V_f([a, b]) + V_f([b, c]) \leq V_f([a, c]) + \varepsilon$.

En effet, il existe alors $a = a_0 < \dots < a_k = b$ réels tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \geq V_f([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Et $b = a_k < \dots < a_p = c$ tels que $\sum_{i=k}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \geq V_f([b, c]) - \frac{\varepsilon}{2}$

Et donc $V_f([a, b]) + V_f([b, c]) \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \varepsilon + V_f([a, c])$

Donc comme c'est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $V_f([a, b]) + V_f([b, c]) \leq V_f([a, c])$

D'où l'égalité.

Pour (3) : pour tous $a = a_0 < \dots < a_p = b$, on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Pour (4) :

Soit f lipschitzienne :

Il existe alors $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

Soient $a = a_0 < \dots < a_p = b$ des réels.

$$\text{Alors } \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq k \sum_{i=0}^{p-1} |a_{i+1} - a_i|$$

Mais comme l'application $x \mapsto x$ est à variation bornée sur $[a, b]$ (elle y est de classe C^1), il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous réels $a = a_0 < \dots < a_p = b$, on ait

$$\sum_{i=0}^{p-1} |a_{i+1} - a_i| \leq M.$$

$$\text{Et on a alors } \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq M' \text{ où } M' = kM$$

Donc f est à variation bornée.

Si maintenant f est monotone, disons par exemple croissante :

Soient $a = a_0 < \dots < a_p = b$ des réels.

$$\text{Alors } \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| = \sum_{i=0}^{p-1} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) = f(b) - f(a)$$

$$\text{Donc } \sum_{i=0}^{p-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq f(b) - f(a).$$

Donc f est à variation bornée ($f(b) - f(a) \geq 0$)

Théorème :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est à variation bornée si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes.

En particulier, l'ensemble des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ à variation bornée est le sous-espace engendré par les fonctions à valeurs réelles et croissantes.

Démonstration :

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, f est à variation bornée sur $[a, x]$, et on peut noter $F(x) = V_f([a, x])$

Alors F est croissante car pour x, y tels que $x > y$, on a :

$$F(x) = F(y) + V_f([y, x]) \geq F(y)$$

Montrons alors que $B : x \mapsto F(x) - f(x)$ est aussi croissante :

Pour tous $x > y$ et toute subdivision $a = y_0 < \dots < y_p = y$ de $[a, y]$,

$a = y_0 < \dots < y_p = y < y_{p+1} = x$ est une subdivision de $[a, x]$, donc

$$\sum_{k=0}^{p-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)| + |f(x) - f(y)| \leq F(x)$$

Et en passant à la borne supérieure sur les subdivisions de $[a, y]$, on obtient $F(y) + |f(x) - f(y)| \leq F(x)$, soit

$$B(x) - B(y) = (F(x) - f(x)) - (F(y) - f(y)) \geq |f(x) - f(y)| - (f(x) - f(y)) \geq 0$$

Donc $f = F - B$ avec F et B croissantes.

La réciproque est vraie d'après les propriétés (1) et (4) précédentes.

Pour les fonctions complexes, si f est à variation bornée, alors $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont aussi, donc sont combinaisons linéaires de fonctions croissantes et donc f aussi.

- Cas des fonctions 2π -périodiques :

Propriété :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux 2π -périodique et à variation bornée sur $[0, 2\pi]$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $|c_n(f)| \leq \frac{K}{2n}$ où $K = V_f([0, 2\pi])$

Remarque :

Une fonction à variation bornée est réglée car elle est combinaison linéaire de fonctions croissantes, qui sont réglées (c'est-à-dire qui admettent une limite finie à droite et à gauche en tout point). Avec une théorie de l'intégration plus complète, on pourrait donc se passer de la continuité par morceaux.

Démonstration :

Pour $|n| \geq 1$ et $k = 0, \dots, 2n-1$, on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in.t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-k\frac{\pi}{n}}^{2\pi-k\frac{\pi}{n}} e^{-in.u-ik.\pi} f(u+k\frac{\pi}{n}) du \\ &= (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in.t} f(t+k\frac{\pi}{n}) dt \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 4\pi \cdot n c_n(f) = 2\pi \underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1} c_n(f)}_{2n \cdot c_n(f)} = \int_0^{2\pi} e^{-in.t} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k f(t+k\frac{\pi}{n}) \right) dt$$

D'où

$$\begin{aligned} 4\pi \cdot |n c_n(f)| &\leq \int_0^{2\pi} |f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}) + f(t+2\frac{\pi}{n}) - \dots - f(t+(2n-1)\frac{\pi}{n})| dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} V_f([t, t+2\pi]) dt \end{aligned}$$

Mais comme $V_f([t, t+2\pi]) = V_f([0, 2\pi])$ (par périodicité), on a

$$4\pi \cdot |n c_n(f)| \leq 2\pi V_f([0, 2\pi])$$

- Un exemple :

La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x)$ est continue mais pas à variation bornée ; ce n'est pas une différence de fonctions croissantes.

f est bien définie, continue et 2π -périodique sur $\mathbb{R}$, car la série trigonométrique la définissant est normalement convergente. De plus, comme il y a convergence normale, ses coefficients de Fourier se calculent en intégrant terme à terme les séries de termes

généraux $\left(\frac{1}{n^2} \cos(n^3 x) \cos(px) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^2} \cos(n^3 x) \sin(px) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

On a ainsi $\forall k \geq 1, b_k(f) = 0$ et $a_k(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ n'est pas un cube non nul} \\ \frac{1}{p^2} & \text{si } k = p^3 \end{cases}$

$(ka_k(f))_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas bornée, et f n'est pas à variation bornée.

B) Théorème de Dini–Lipschitz

Définition :

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dite hölderienne lorsqu'il existe $K > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$.

Théorème :

Si f est 2π -périodique et hölderienne, la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Remarque :

Plus généralement, la conclusion subsiste si on remplace le caractère hölderien par le fait que le module de continuité uniforme ω de f est tel que $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$ soit intégrable sur $]0;1]$

On sait qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en au moins un point.

Lemme de Riemann–Lebesgue « uniforme » :

Soit $K : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors $L(x, \lambda) = \int_c^d K(x, t) e^{i\lambda t} dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $\pm\infty$, et ce uniformément en $x \in [a, b]$.

En effet :

On a déjà la convergence simple vers 0 sur $[a, b]$ d'après le lemme de Riemann–Lebesgue classique.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x, t)\| = \max(|x|, |t|)$ et on note W le module de continuité uniforme de K sur $[a, b] \times [c, d]$. Ainsi, W est croissant, continu en 0 (car K est continue sur un compact, donc uniformément continue) et $W(0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$.

On note $\delta > 0$ tel que $W(\delta) < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$. On divise alors $[a, b]$ en sous-intervalles

$[a_i, a_{i+1}]$ avec $a = a_0 < \dots < a_p = b$ de sorte que $\forall i \leq p-1, a_{i+1} - a_i < \delta$

Comme on a convergence simple, il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$|\lambda| > \Lambda \Rightarrow \forall i \in [0, p], |L(a_i, \lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$, il existe i tel que $x \in [a_i, a_{i+1}]$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| > \Lambda$, on a :

$$\begin{aligned} |L(x, \lambda)| &\leq |L(a_i, \lambda)| + |L(x, \lambda) - L(a_i, \lambda)| \leq \varepsilon + \int_c^d |K(x, t) - K(a_i, t)| dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + (d-c)W(\delta) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Pour le théorème maintenant :

Il suffit de montrer la convergence uniforme de $S_n(f)$ vers f sur $[0, 2\pi]$.

$$\text{On a déjà vu que } S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\omega(t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$, on peut choisir δ tel que $0 < \delta < \pi$ et $\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt < \frac{\varepsilon}{3}$.

On découpe l'intégrale précédente en trois morceaux : $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, \pi]$.

Pour tout $x \in [0, 2\pi]$, on a alors (en utilisant le fait que $\sin(\frac{t}{2}) \geq \frac{t}{\pi}$ sur $[0, \pi]$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^\delta (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt \right| &\leq \int_{-\delta}^\delta \frac{\omega(|t|)}{\sin \frac{t}{2}} |\sin((n+\frac{1}{2})t)| dt \\ &\leq 2\pi \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt \leq 2\pi \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Enfin, selon le lemme, pour ce $\delta > 0$ fixé, $x \mapsto \int_\delta^\pi (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt$ tend uniformément vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ et il en est de même pour $x \mapsto \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \int_\delta^\pi (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq 2\pi \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \left| \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - f(x)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} dt \right| \leq 2\pi \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in [0, 2\pi]$, on a $|S_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

D'où la convergence.

C) Théorème de Bernstein

Théorème :

Si f est 2π -périodique et hölderienne d'exposant $b > \frac{1}{2}$ (par exemple lipschitzienne), alors la série de Fourier converge normalement vers f .

Remarque :

Avec la suite de Rudin-Shapiro, on verra que le théorème de Bernstein est optimal, c'est-à-dire qu'il existe f hölderienne d'exposant supérieur à $\frac{1}{2}$ dont la série de Fourier n'est pas normalement convergente. Il faut enfin comparer ces propriétés au théorème de Dini-Lipschitz selon lequel la série de Fourier d'une fonction hölderienne converge uniformément vers la fonction (et pour tout exposant de Hölder)

Démonstration du théorème :

Soit f 2π -périodique hölderienne de coefficients de Fourier $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Soit $h \in \mathbb{R}$. Un changement de variables montre que les coefficients de Fourier de $g_h : x \mapsto f(x+h)$ vérifient $c_n(g_h) = e^{inh} c_n(f)$, et ceux de $k_h = g_h - g_{-h}$ vérifient alors $c_n(k_h) = 2i \sin(nh) c_n(f)$

Ainsi, d'après la formule de Parseval,

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx = 8\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sin^2(nh) |c_n(f)|^2$$

On note a, b tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq a|x-y|^b$ ($b > \frac{1}{2}$)

Soit alors $N \geq 1$; on applique la relation précédente avec $h = \frac{\pi}{4N}$.

Comme pour $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, on a $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$, pour $N < |n| \leq 2N$, on peut minorer $|\sin(nh)|$ par $\frac{2}{\pi}|nh| \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\pi a^2 (2h)^{2b} &\geq \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 dx \geq 8\pi \sum_{N < |n| \leq 2N} \sin^2(nh) |c_n(f)|^2 \\ &\geq 2\pi \sum_{N < |n| \leq 2N} |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

$$\text{C'est-à-dire } \forall N \geq 1, \sum_{k=N}^{2N} |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2 \leq cN^{-2b} \text{ où } c = \frac{a^2}{4^b} \pi^{2b}$$

Montrons maintenant que la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire que la série de terme général $t_p = \sum_{2^p < |n| \leq 2^{p+1}} |c_n|$ converge (en faisant un groupement de termes).

t_p contient 2^{p+1} termes, donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité donnent :

$$t_p = \sum_{2^p < |n| \leq 2^{p+1}} |c_n| \cdot 1 \leq \left(\sum_{2^p < |n| \leq 2^{p+1}} |c_n|^2 \right)^{1/2} 2^{\frac{p+1}{2}} \leq c \cdot (2^p)^{-b} 2^{\frac{p+1}{2}} = c' r^p$$

Avec $r = 2^{1/2-b}$. Comme $b > \frac{1}{2}$, la série géométrique de raison r converge, donc la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, c'est-à-dire que la série de Fourier de f converge normalement.

Reste à montrer que la somme de cette série est bien f :

Soit g la fonction somme de la série de Fourier de f . Comme il y a convergence normale, g est continue et pour calculer ses coefficients, on peut intégrer terme à terme. Ainsi, f et g sont continues et on remarque qu'elles ont les mêmes coefficients de Fourier. Donc elles sont égales.

1) Polynômes de Rudin-Shapiro

On considère les polynômes définis par :

$$P_0 = Q_0 = X \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$P_{n+1} = P_n + X^{2^n} Q_n, \quad Q_{n+1} = P_n - X^{2^n} Q_n$$

Propriétés :

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et Q_n sont des polynômes de degré 2^n et de valuation 1 (rappel : la valuation est le coefficient minimal non nul, ou aussi la multiplicité de 0 en tant que racine du polynôme).
- (2) Il existe une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ de réels ± 1 telle que :

$$\forall n \geq 1, P_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_k X^k, Q_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_{k+2^n} X^k = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k X^k - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} c_k X^k$$

- (3) Pour tout z de module 1, on a $|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2 = 2^{n+1}$

Démonstration :

(1)...

(2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n et Q_n sont de la forme $P_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_{k,n} X^k$,

$Q_n = \sum_{k=1}^{2^n} d_{k,n} X^k$, avec $c_{k,n} = \pm 1$, $d_{k,n} = \pm 1$. On a de plus, pour $1 \leq k \leq 2^n$,
 $c_{k,n+1} = d_{k,n+1} = c_{k,n}$ et pour $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$, $c_{k,n+1} = -d_{k,n+1} = d_{k-2^n,n}$.

Comme P_n est le tronqué en degré 2^n de P_{n+1} (c'est-à-dire que les 2^n premiers coefficients de P_n sont les mêmes que ceux de P_{n+1}), en posant $c_k = c_{k,n}$ où n est un entier quelconque tel que $2^n \geq k$, on définit une suite $(c_n)_{n \geq 1}$ pour laquelle $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_k X^k$. L'égalité $Q_n = X^{-2^n} (P_{n+1} - P_n)$ donne ensuite la première expression de Q_n , et la seconde découle de la comparaison entre

$$P_n = P_{n-1} + X^{2^{n-1}} Q_{n-1} \text{ et } Q_n = P_{n-1} - X^{2^{n-1}} Q_{n-1}$$

(3) : on a même pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|P_{n+1}(z)|^2 + |Q_{n+1}(z)|^2 = 2|P_n(z)|^2 + 2|z|^{2^n} |Q_n(z)|^2$$

En effet, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |a+b|^2 + |a-b|^2 &= (a+b)(\overline{a+b}) + (a-b)(\overline{a-b}) \\ &= a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{a} - b\overline{a} - a\overline{b} + b\overline{b} \\ &= 2|a|^2 + 2|b|^2 \end{aligned}$$

Et on utilise ensuite la définition de P_{n+1} et Q_{n+1} .

Ensuite, on fait par récurrence pour l'égalité avec $|z| = 1$.

2) Suite de Rudin–Shapiro

Définition :

La suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ s'appelle suite de Rudin–Shapiro (elle a été introduite indépendamment par les deux personnes dans les années 50)

Calcul des c_k :

Propriété (Brillhart et Carlitz) :

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = (-1)^{N(k)}$ où $N(k)$ est le nombre de 11 dans l'écriture en base 2 de $k-1$.

Démonstration :

Par récurrence : déjà, la propriété est vraie pour $k \leq 4$. Supposons la vraie pour $k \leq 2^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Avec les relations

$$P_{n+2} = P_{n+1} + X^{2^{n+1}} Q_{n+1} = P_{n+1} + X^{2^{n+1}} (P_n - X^{2^n} Q_n) = P_{n+1} + X^{2^{n+1}} (-P_{n+1} + 2P_n),$$

$$\text{on obtient } c_{2^{n+1}+j} = \begin{cases} c_j & \text{si } 1 \leq j \leq 2^n \\ -c_j & \text{si } 2^n + 1 \leq j \leq 2^{n+1} \end{cases}$$

De plus, si $1 \leq j \leq 2^n$, l'écriture binaire de $2^{n+1} + j - 1$ s'obtient en ajoutant 10 à gauche de celle de $j - 1$, donc le nombre de 11 ne change pas ; et si $2^n + 1 \leq j \leq 2^{n+1}$, l'écriture binaire de $2^{n+1} + j - 1$ s'obtient en ajoutant 1 à gauche de celle de $j - 1$; or, dans ce cas, l'écriture binaire de $j - 1$ commence déjà par un 1, donc le nombre de 11 augmente de 1. La relation est donc vraie pour $k \leq 2^{n+2}$, ce qui achève la récurrence.

3) Des polynômes trigonométriques

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $p \geq 1$, on note n l'unique entier tel que $2^{n-1} < p \leq 2^n$, et on pose alors $F_p(t) = \sum_{k=1}^p c_k e^{ikt}$ et $G_p(t) = \sum_{k=1}^p c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k e^{ikt} - \sum_{k=2^{n-1}+1}^p c_k e^{ikt}$

Ainsi, $F_{2^n}(t) = P_n(e^{it})$ et $G_{2^n}(t) = Q_n(e^{it})$.

Propriété :

Pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|F_p(x)| \leq A\sqrt{p}$ et $|G_p(x)| \leq A\sqrt{p}$ où $A = 2 + \sqrt{2}$.

En effet :

Lorsque p est une puissance de 2, l'inégalité découle de la propriété (3) vue en 1). (car $\sqrt{2} \leq A$ et $F_{2^n}(t) = P_n(e^{it})$, $G_{2^n}(t) = Q_n(e^{it})$)

Supposons les inégalités vraies jusqu'à l'indice $p-1 \geq 2$. Alors, en considérant n tel que $2^n + 1 \leq p \leq 2^{n+1} - 1$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F_p(t) = P_n(e^{it}) + \sum_{k=2^n+1}^p c_k e^{ikt} = P_n(e^{it}) + e^{i2^n t} \sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt}$$

Si $p - 2^n \leq 2^{n-1}$, alors $\sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{p-2^n} c_k e^{ikt} = F_{p-2^n}(t)$ (d'après la propriété

(2) du 1))

Et si $p - 2^n > 2^{n-1}$, on a $p - 2^n < 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-2^n} c_{k+2^n} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} c_k e^{ikt} - \sum_{k=2^{n-1}+1}^{p-2^n} c_k e^{ikt} = G_{p-2^n}(t)$$

D'où $F_p(t) = F_{2^n}(it) + e^{i2^n t} F_{p-2^n}(t)$ ou $F_p(t) = F_{2^n}(it) + e^{i2^n t} G_{p-2^n}(t)$

Et dans les deux cas par hypothèse de récurrence :

$$|F_p(t)| \leq \sqrt{2^{n+1}} + A\sqrt{p-2^n}.$$

Mais comme $2^n \leq p$ et $p - 2^n \leq \frac{p}{2}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |F_p(t)| \left(\sqrt{2} + \frac{A}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{p} = A\sqrt{p}.$$

Le cas de G_p est analogue.

4) Des séries trigonométriques

Théorème :

Pour tout $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_k}{k^\alpha} e^{ikx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement. Sa somme h_α est continue, 2π -périodique et vérifie

$$(h_\alpha * h_\alpha)(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{k^{2\alpha}}$$

Remarque :

On peut remplacer $f(k) = k^{-\alpha}$ par toute fonction f décroissant vers 0 telle que la série de terme général $\sqrt{k}(f(k) - f(k+1))$ converge. On ne peut pas améliorer ce résultat car, d'après la formule de Parseval, la série de terme général $f(k)^{-2}$ doit converger.

Démonstration :

Par une transformation d'Abel, on a pour $n > m$, la majoration uniforme :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m \frac{c_k e^{ikt}}{k^\alpha} \right| &= \left| \sum_{k=n}^m \frac{F_k(t) - F_{k-1}(t)}{k^\alpha} \right| = \left| -\frac{F_{m-1}(t)}{m^\alpha} + \frac{F_n(t)}{n^\alpha} + \sum_{k=m}^{n-1} F_k(t) \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) \right| \\ &\leq A \left(m^{1/2-\alpha} + n^{1/2-\alpha} + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha \sqrt{k}} \right) \leq A \left(2m^{1/2-\alpha} + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1/2}} \right) \end{aligned}$$

(la série de terme général $\frac{1}{k^{\alpha+1/2}}$ converge car $\alpha + \frac{1}{2} > 1$)

On voit donc que la série vérifie le critère de Cauchy pour la convergence uniforme. Elle est donc uniformément convergente. Ainsi, la somme h_α de la série est continue, 2π -périodique, et ses coefficients de Fourier s'obtiennent en intégrant terme à terme la série trigonométrique :

$$c_n(h_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ \pm \frac{1}{n^\alpha} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

L'expression des coefficients de Fourier d'une convolée donne

$$c_n(h_\alpha * h_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ \frac{1}{n^{2\alpha}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}, \text{ et comme la série de Fourier de } h_\alpha * h_\alpha \text{ est}$$

uniformément convergente (car normalement, puisque $2\alpha > 1$), sa somme g_α est une fonction continue dont les coefficients s'obtiennent terme à terme, c'est-à-dire que ce sont ceux de $h_\alpha * h_\alpha$. La formule de Parseval appliquée à $h_\alpha * h_\alpha - g_\alpha$

montre alors que $h_\alpha * h_\alpha = g_\alpha$, c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R}, (h_\alpha * h_\alpha)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in.t}}{n^{2\alpha}}$

5) Une série entière uniformément convergente pas normalement convergente sur $D_f(0,1)$

- Principe du maximum pour les polynômes :

Propriété :

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$

Preuve :

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Comme P est continu sur le compact $D_f(0,1)$, il existe $z_0 \in D_f(0,1)$ tel que $\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| = |P(z_0)|$. Supposons $|z_0| < 1$

On considère alors $r > 0$ tel que $|z_0| + r < 1$. La formule de Taylor polynomial en z_0 donne :

$$P(z_0 + re^{it}) = \sum_{k=0}^d P^{(k)}(z_0) \frac{r^k e^{ikt}}{k!}$$

Et donc $\int_0^{2\pi} P(z_0 + re^{it}) dt = 2\pi P(z_0)$. Ainsi, par choix de z_0 ,

$$|P(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(z_0 + re^{it})| dt \leq |P(z_0)|$$

Soit, comme P est continu, $\forall t \in \mathbb{R}, |P(z_0 + re^{it})| = |P(z_0)|$.

La formule de Parseval donne alors :

$$|P(z_0)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(z_0 + re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^d |P^{(k)}(z_0)|^2 \frac{r^{2k}}{(k!)^2}$$

Donc P est le polynôme constant $P = P(z_0)$ et on a $\sup_{|z| \leq 1} |P(z)| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$

Remarque :

- (1) On a même prouvé ici que si le maximum est atteint dans le disque ouvert, alors P est constant.
- (2) La preuve s'applique à toute fonction analytique sur un ouvert contenant $D_f(0,1)$, et en particulier à toute fonction somme d'une série entière de rayon de convergence strictement supérieur à 1.

- Une série entière :

Propriété :

Pour $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$, la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}$ est uniformément convergente sur $D_f(0,1)$ mais pas normalement convergente.

Démonstration :

Le principe du maximum (pour les polynômes) montre que pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et

$n > m$, on a :

$$\sup_{z \in D_f(0,1)} \left| \sum_{k=m+1}^n c_k \frac{z^k}{k^\alpha} \right| = \sup_{|z|=1} \left| \sum_{k=m+1}^n c_k \frac{z^k}{k^\alpha} \right| = \|F_n - F_m\|_\infty$$

Comme la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{z^k}{k^\alpha}$ est uniformément de Cauchy, donc uniformément convergente sur $D_f(0,1)$. Pour $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$, elle n'est pas normalement convergente.

D) Comment « développer une fonction en série de Fourier » ?

Développer une fonction f en série de Fourier signifie :

- Déterminer les coefficients de Fourier de f .
- Appliquer le théorème de Dirichlet

On a deux méthodes :

- (1) La méthode directe, calcul des coefficients, vérification du fait que f est de classe C^1 par morceaux.
- (2) Méthode indirecte : (on suppose que $T = 2\pi$)

On développe f en « série trigonométrique », c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ où

$$u_0 = \alpha_0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_n(x) = \begin{cases} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \\ \text{ou } \gamma_n e^{inx} + \gamma_{-n} e^{-inx} \end{cases} \text{ et on montre que les coefficients}$$

vérifient :

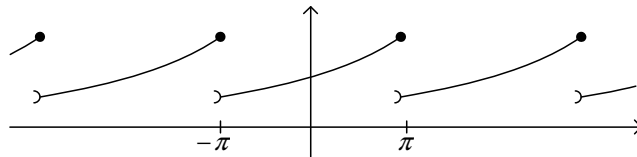
$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \gamma_n, \text{ c'est-à-dire que } \gamma_n = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} e^{-in.t} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) dt, \text{ égalité qu'on}$$

obtient généralement en constatant que la série de fonctions $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) e^{-in.t}$ est uniformément convergente sur $[a, a+2\pi]$.

Exemples :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, f définie par $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f(x) = e^{\alpha x}$, 2π -périodique.

Graphique pour $a = \frac{1}{2}$:



f est de classe C^1 par morceaux, 2π -périodique

$$\text{Coefficients de Fourier : on a } c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha - in)t} dt$$

(1) Si $\alpha \in i\mathbb{Z}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{in_0 x}$ donc $f \in T$. Donc $S(f) = f$

(2) Si $\alpha \notin i\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(\alpha - in)t}}{\alpha - in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{(\alpha - in)\pi} - e^{-(\alpha - in)\pi}}{2\pi(\alpha - in)} = (-1)^n \frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2\pi(\alpha - in)} \\ &= (-1)^n \frac{\text{sh}(\alpha\pi)}{\pi(\alpha - in)} \end{aligned}$$

Donc la série est simplement convergente, mais pas normalement.
Le théorème de Dirichlet donne :

$$\text{Pour } x \in]-\pi, \pi[, \frac{\text{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n e^{inx}}{\alpha - in} + \frac{(-1)^{-n} e^{-inx}}{\alpha + in} \right) \right) = e^{\alpha x}$$

$$\text{Et en } x = \pi : \frac{\text{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha - in} + \frac{1}{\alpha + in} \right) \right) = \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{2}$$

$$\text{C'est-à-dire } \frac{\text{sh}(\alpha\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} \right) = \text{ch}(\alpha\pi) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$$

$$\text{Conséquence : } \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}, \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + n^2} = \pi \coth(\alpha\pi)$$

Exemple 2 :

Soit $a \in]-1, 1[$. Développer $f : x \mapsto \ln(1 - a \cos x)$ en série de Fourier.

Etude :

F est de classe C^∞ , 2π -périodique. Le théorème de Dirichlet s'applique donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \cos nx \quad (f \text{ est paire}) \text{ et on a même convergence normale.}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}$$

On suppose $a > 0$. On pose alors $a = \frac{1}{\text{ch} \varphi}$ avec $\varphi > 0$.

$$\text{On a alors } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\sin x}{\text{ch} \varphi - \cos x} = -i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\text{ch} \varphi - e^{ix} - e^{-ix}}$$

Soit en posant $z = e^{ix}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= i \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z \text{ch} \varphi + 1} = i \frac{z^2 - 1}{(z - e^\varphi)(z - e^{-\varphi})} \\ &= i + i \frac{e^{2\varphi} - 1}{(e^\varphi - e^{-\varphi})(z - e^\varphi)} + i \frac{e^{-2\varphi} - 1}{(z - e^{-\varphi})(e^{-\varphi} - e^\varphi)} \\ &= i - i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-n\varphi} \right) + i \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\varphi}}{z^n} \right) \end{aligned}$$

$$(\text{car } |ze^{-\varphi}| = \left| \frac{e^{-\varphi}}{z} \right| = e^{-\varphi} < 1)$$

$$f'(x) = i \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-inx} e^{-n\varphi} - e^{inx} e^{-n\varphi}) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\varphi} \sin nx$$

$$\text{Donc } f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0) = \ln(1 - a) + i \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{e^{-n\varphi} \sin nt}_{u_n(t)} dt$$

Or, la série de terme général u_n est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. ($\|u_n\|_\infty = e^{-n\varphi}$)

Et les u_n sont continus.

Donc

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1-a) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\varphi} \frac{1 - \cos nx}{n} = \ln(1-a) + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\varphi}}{n}}_{-\ln(1-e^{-\varphi})} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\varphi}}{n} \cos nx \\
 &= \underbrace{\ln\left(\frac{1-a}{(1-e^{-\varphi})^2}\right)}_{\alpha_0} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-n\varphi}}{n}}_{\frac{\alpha_n}{2}} \cos nx
 \end{aligned}$$

Attention :

On a un développement de f en série trigonométrique, mais on n'est pas sûr que c'est sa série de Fourier. Il faut maintenant montrer que $\alpha_0 = a_0(f)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(f) = -\frac{2e^{-n\varphi}}{n} = \alpha_n$$

$$\text{Pour } p \geq 1, \text{ on a } a_p(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(pt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos nt \cos ptdt$$

On pose $v_n(t) = \alpha_n \cos nt \cos pt$. Alors $\|v_n\|_\infty = |\alpha_n| = \frac{2e^{-n\varphi}}{n}$, terme général d'une série convergente.

On peut donc intégrer terme à terme, et :

$$a_p(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \underbrace{\int_0^\pi \cos nt \cos ptdt}_{=\frac{\pi}{2} \delta_{p,n}} = \alpha_n$$

E) Injectivité de $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ pour les fonctions continues

Théorème :

L'application qui à $f \in C_{2\pi}$ associe $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ est linéaire injective.

Corollaire :

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodiques continues telles que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$

Alors $f = g$.

Remarque :

L'application est aussi injective sur $\mathcal{D}$.

Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodiques continues par morceaux sont tels que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$, alors f et g sont égales sauf sur une partie finie de $[0, 2\pi]$.

(Et ce même si les séries *divergent*)

Démonstration :

On applique l'égalité de Parseval à $f - g$:

$$\|h\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(h)|^2. \text{ Donc si } \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(h) = 0, \text{ alors } \|h\|_2 = 0. \text{ Si de plus } h \text{ est}$$

continue ou continue par morceaux à sauts symétriques, alors h est nulle.

F) Taille des coefficients et régularité

Rappel :

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 et 2π -périodique, alors $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f') = inc_n(f)$

Proposition :

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique et de classe C^k , alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

Démonstration :

Pour $n \neq 0$, on a $c_n(f) = \left(\frac{1}{in}\right)^k c_n(f^{(k)})$

Le lemme de Riemann–Lebesgue pour $f^{(k)}$ montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |n^k c_n(f)| = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} |c_n(f^{(k)})| = 0$$

D'où le résultat.

Proposition :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique continue. Soit $k \in \mathbb{N}$

Si la série de terme général $n^k (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$ converge, alors f est de classe C^k .

En particulier, si $c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{k+2}}\right)$, alors f est de classe C^k

Remarque :

On obtient l'équivalence, pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique continue :

$$f \text{ est de classe } C^\infty \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^p c_n(f) = 0$$

Démonstration de la proposition :

Posons $g(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}$. Alors :

(1) g est définie et de classe C^k sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique.

En effet, posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u_0(x) = c_0(f) \\ u_n(x) = c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx} \end{cases}$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^k et

$$\forall j \in [0, k], \forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(j)}(x) = (in)^j (c_n(f)e^{inx} + (-1)^j c_{-n}(f)e^{-inx})$$

Pour tout $j \in [0, k]$, la série de terme général $u_n^{(j)}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente, car

$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n^{(j)}\|_\infty \leq n^j (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|) \leq n^k (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$, terme général d'une série convergente par hypothèse.

Donc g est de classe C^k , k fois dérivable terme à terme.

(2) g est 2π -périodique.

(3) Enfin, $g = f$:

Déjà, g est continue et 2π -périodique.

Calculons les $c_p(g)$:

$$\text{Pour } p \in \mathbb{Z}, c_p(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) e^{-ipx} \right) dx.$$

Posons alors pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = u_n(x) e^{-ipx}$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue, $\|v_n\|_\infty = \|u_n\|_\infty$, donc la série de terme général v_n est normalement convergente.

On peut donc intégrer terme à terme sur $[0, 2\pi]$:

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} v_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{p|n} 2\pi c_n(f) = c_p(f)$$

G) Séries remarquables obtenues à partir des séries de Fourier

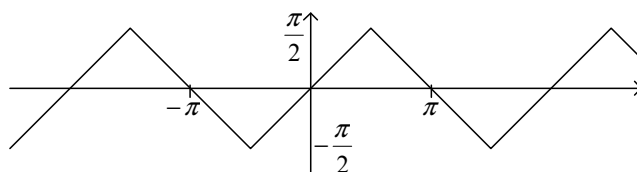
Exemple : on définit f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$

Étudions la série de Fourier de f :

(1) Graphe :

f est 2π -périodique car $\sin$ l'est, impaire. Sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = x$.

Pour $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x$



Donc f est continue, C^1 par morceaux.

(2) Calcul des coefficients :

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(- \left[x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi/2} - \left[(\pi - x) \frac{\cos nx}{n} \right]_{\pi/2}^\pi + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos nx}{n} dx - \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos nx}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_{\pi/2}^\pi \right) = \frac{4}{n^2 \pi} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Dirichlet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n \frac{\pi}{2})}{n^2} \sin nx$$

(3) Application : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\text{On a } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin((2p+1)x)$$

$$\text{Donc en } x = \frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\text{Puis } \underbrace{\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2}}_{\rightarrow \xi(2)} = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{1}{4k^2}}_{\rightarrow \xi(2)/4} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{\rightarrow \pi^2/8}$$

H) Résolution d'équations fonctionnelles (idée de Fourier)

Exemple d'équation fonctionnelle :

(E) : $y'' + ay' + by = f$, où $a, b \in \mathbb{C}$, f est continue 2π -périodique.

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que (E) ait au moins une solution 2π -périodique.

Analyse spectrale :

On cherche les coefficients de y si y est une solution 2π -périodique de (E).

Par linéarité de $\varphi \mapsto c_n(\varphi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= c_n(y'') + ac_n(y') + bc_n(y) \\ &= (-n^2 + ain + b)c_n(y) \end{aligned}$$

1^{er} cas : $\forall n \in \mathbb{Z}, -n^2 + ain + b \neq 0$

Alors (E) a au plus une solution 2π -périodique y , caractérisée par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(y) = \frac{c_n(f)}{-n^2 + ain + b}$$

2^{ème} cas : S'il existe une ou deux solutions $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ à $-n^2 + ain + b = 0$.

Une condition nécessaire est que $c_{n_1}(f) = c_{n_2}(f) = 0$ pour une solution. Ainsi,

Soit (E) n'a pas de solution, soit (E) a une infinité de solution.

En effet, si y_0 est solution, alors pour tout $C \in \mathbb{C}$, $x \mapsto y_0(x) + Ce^{in_j x}$ ($j=1,2$) est aussi une solution.

Peut-on dire mieux pour chacun des deux cas ?

(1) Si f est de classe C^1 par morceaux, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$

Et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$ converge.

- Si $\forall n \in \mathbb{Z}, -n^2 + ain + b \neq 0$

$$\text{Posons pour } x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n(f) e^{inx}}{-n^2 + ain + b} = v_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

$$\text{Où } v_0 = \frac{c_0(f)}{b} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, v_n(x) = \frac{c_n(f) e^{-inx}}{-n^2 + ain + b} + \frac{c_{-n}(f) e^{inx}}{-n^2 - ain + b}$$

Alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et est solution de (E).

En effet, les v_n sont de classe C^2 , et les séries de terme général $v_n^{(j)}$ ($j=1,2$) sont normalement convergentes car

$$\|v_n^{(j)}\|_\infty \leq n^j \left(\frac{|c_n(f)|}{|-n^2 + ain + b|} + \frac{|c_{-n}(f)|}{|-n^2 - ain + b|} \right)_{n \rightarrow \pm\infty} = O(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$$

Donc g est de classe C^2 , dérivable terme à terme et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + ag'(x) + bg(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{bc_n(f)e^{inx} + inac_n(f)e^{inx} - n^2 c_n(f)e^{inx}}{-n^2 + b + ain} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = f(x) \end{aligned}$$

- Si $-n^2 + ain + b$ s'annule pour $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$:

$$\text{On pose } g(x) = \sum_{n \neq n_1, n_2} \frac{c_n(f)e^{inx}}{-n^2 + ain + b}$$

On a le même résultat (sachant que $c_{n_1}(f) = c_{n_2}(f) = 0$)

(2) Si maintenant f n'est que continue :

On va montrer que si $\forall n \in \mathbb{Z}, (-n^2 + ain + b = 0 \Rightarrow c_n(f) = 0)$,

Alors (E) a au moins une solution 2π -périodique.

On va utiliser la variation des constantes et l'expression intégrale des solutions :

Equation sans second membre : $y'' + ay' + by = 0$

Equation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$

On suppose que $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$. Ainsi, on a deux racines r_1, r_2 distinctes.

Un système fondamental de solutions est donc $x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x}$.

Dans (E) , on pose $\begin{cases} y(x) = \lambda(x)e^{r_1 x} + \mu(x)e^{r_2 x} \\ y'(x) = \lambda(x)r_1 e^{r_1 x} + \mu(x)r_2 e^{r_2 x} \end{cases}$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda'(x)e^{r_1 x} + \mu'(x)e^{r_2 x} = 0 \\ \lambda'(x)r_1 e^{r_1 x} + \mu'(x)r_2 e^{r_2 x} = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lambda'(x) = \frac{-f(x)e^{-r_1 x}}{r_2 - r_1}, \mu'(x) = \frac{-f(x)e^{-r_2 x}}{r_1 - r_2}$$

La solution général de (E) s'écrit donc :

$$y(x) = \left(A - \int_0^x \frac{f(t)e^{-r_1 t}}{r_2 - r_1} dt \right) e^{r_1 x} + \left(B - \int_0^x \frac{f(t)e^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} dt \right) e^{r_2 x}$$

$$(\text{Et } y'(x) = \left(A - \int_0^x \frac{f(t)e^{-r_1 t}}{r_2 - r_1} dt \right) r_1 e^{r_1 x} + \left(B - \int_0^x \frac{f(t)e^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} dt \right) r_2 e^{r_2 x})$$

Alors y est 2π -périodique si et seulement si $y(0) = y(2\pi)$ et $y'(0) = y'(2\pi)$

En effet, comme f est 2π -périodique, si y est solution, alors $z : x \mapsto y(x + 2\pi)$ l'est aussi.

$$\text{Donc si } \begin{cases} y(0) = y(2\pi) = z(0) \\ y'(0) = y'(2\pi) = z'(0) \end{cases}, \text{ alors d'après le théorème de Cauchy } y = z$$

Il suffit donc de montrer qu'il existe A et B tels que $y(0) = y(2\pi)$ et $y'(0) = y'(2\pi)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} A + B = \left(A - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_1 t}}{r_2 - r_1} dt \right) e^{r_1 2\pi} + \left(B - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} dt \right) e^{r_2 2\pi} \\ Ar_1 + Br_2 = \left(A - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_1 t}}{r_2 - r_1} dt \right) r_1 e^{r_1 2\pi} + \left(B - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} dt \right) r_2 e^{r_2 2\pi} \end{cases}$$

Ou, comme $r_1 \neq r_2$:

$$\begin{cases} A = \left(A - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_1 t}}{r_2 - r_1} dt \right) e^{r_1 2\pi} & (1) \\ B = \left(B - \int_0^{2\pi} \frac{f(t)e^{-r_2 t}}{r_1 - r_2} dt \right) e^{r_2 2\pi} & (2) \end{cases}$$

Discussion :

Si $e^{2\pi r_1} \neq 1$, il existe A unique tel que (1)

Si $e^{2\pi r_1} = 1$, alors $r_1 = in$ où $n \in \mathbb{Z}$

Et donc $(in)^2 + a(in) + b = 0$, c'est-à-dire $-n^2 + ain + b = 0$

Donc $c_n(f) = 0$ et (1) devient $A = A$, qui a une infinité de solutions.

On fait la même chose pour B .