

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Suites de Fonctions

Théorème de Stone-Weierstrass

Démonstration par les polynômes de Bernstein

Soit E un evn de dimension finie . $C^0([0, 1], E)$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$N_{\infty}(f) = \sup(\|f(t)\|, t \in [0, 1])$$

On pose pour tout entiers $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq k \leq n$

$$E_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k}$$

(Polynômes de BERNSTEIN : ils ont été introduits par le mathématicien Bernstein au début du 20^{ème} siècle , par des arguments probabilistes : en effet dans la loi binomiale $B(n, p)$ qui compte le nombre de succes dans une suite de n épreuves indépendantes ,où p est la probabilité d'un succes sur une épreuve, la probabilité d'obtenir k succes est :

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$1. \text{ Calculer } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} E_{n,k}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} E_{n,k}$$

$$2. \text{ En déduire la relation } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k-nx)^2 E_{n,k} = nX(1-X)$$

Soit $f \in C^0([0, 1], E)$ et $\varepsilon > 0$. On se propose de déterminer une fonction polynôme P à coefficients dans E

$$\overrightarrow{P(x)} = \sum_{k=0}^{\deg(P)} x^k \overrightarrow{a_k}, \text{ et } \overrightarrow{a_k} \in E$$

telle que $N_{\infty}(f - P) < \varepsilon$

3. Soit $\alpha > 0$ et $t \in [0, 1]$. On note

$$A_n = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| \frac{k}{n} - t \right| \geq \alpha \right\}$$

$$\text{Montrer à l'aide de 2° que } \sum_{k \in A_n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$

4. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |x - y| \leq \alpha \Rightarrow \left\| \overrightarrow{f(x)} - \overrightarrow{f(y)} \right\| \leq \varepsilon$$

$$5. \text{ On pose } \overrightarrow{P_n(t)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \overrightarrow{f\left(\frac{k}{n}\right)}. \text{ Montrer que } \forall t \in [0, 1]$$

$$\left\| \overrightarrow{P_n(t)} - \overrightarrow{f(t)} \right\| \leq \frac{N_{\infty}(f)}{2\alpha^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{on appelle polynôme d'interpolation de Bernstein de } f \text{ le polynôme } \overrightarrow{P_n}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \overrightarrow{f\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

$$\text{Calculer } \lim_{n \rightarrow \infty} N_{\infty}(\overrightarrow{P_n} - \overrightarrow{f})$$

On sait que pour toute fonction continue sur un intervalle compact $[a, b]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale P telle que $\sup \{|f(x) - P(x)|, x \in [a, b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$. Ceci revient à dire qu'il existe une suite de fonctions polynômiales P_n telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(P_n - f) = 0$, ou encore : f est la limite uniforme (ie: pour

la norme N_∞) d'une suite de fonctions polynômiales. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $e_n : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \rightarrow & e^{inx} \end{matrix}$ qui est donc une application 2π périodique. On appelle polynôme trigonométrique toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e_k$. Le nom de polynôme vient du fait que $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=-N}^N \alpha_k e^{ikt} = \sum_{k=-N}^N \alpha_k X^k$ ou l'on a posé $X = e^{it}$

Le théorème de Stone Wierstass pour les fonctions périodiques s'énonce ainsi:

Pour toute fonction continue 2π périodique f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynômiale trigonométrique P telle que $\sup \{|f(x) - P(x)|, x \in [a, b]\} = N_\infty(f - P) < \varepsilon$.

Dans ce qui suit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est une fonction 2π périodique.

$$1. \text{ Justifier les formules } \left[\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\cos(\frac{mt}{2}) \sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kt) = \frac{\sin(\frac{mt}{2}) \sin(\frac{(m+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right]$$

2. Justifier l'existence de $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. De même soit $\varepsilon > 0$, justifier l'existence de $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout couple de réels (x, y) tels que $|x - y| < \delta_\varepsilon$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$

3. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$
 – préciser $c_n(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1

$$\text{– Montrer que } \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} dx$$

On pose $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$, et, pour $m \in \mathbb{N}$, $\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1} \sum_{N=0}^m S_N(f)$

$$\text{Montrer que pour } t \in \mathbb{R} \left[\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \right]$$

4. En déduire, si $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |\sigma_m(f)(t) - f(t)| &= \frac{1}{2\pi(m+1)} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(t)) \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \right| \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{1}{2\pi(m+1)} \int_{\delta_\varepsilon \leq |x| \leq \pi} 2M \frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})} dx \\ &\leq \varepsilon/2 + \frac{2M}{(m+1) \sin^2(\frac{\delta_\varepsilon}{2})} \end{aligned}$$

penser à vérifier que $\sigma_m(1) = 1$

5. Conclure.

Polynômes de BERNSTEIN

Sergei Natanovic BERNSTEIN est né en 1880 et est mort en 1968.

1) Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour n entier naturel non nul donné, le n -ième polynôme de BERNSTEIN associé à f est :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

2) L'identité $\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} = nX(1-X).$

a) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1$.

Si, pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) = 1$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} = 1.$$

b) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$.

Si, pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) = x$, alors pour n entier naturel non nul donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n$,

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-1)-(k-1)} = X \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l X^l (1-X)^{(n-1)-l} = X(X + (1-X))^{n-1} = X. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-X)^{n-k} = X.$$

2 ème calcul. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} &= \frac{X}{n} \sum_{k=1}^n C_n^k k X^{k-1} (1-Y)^{n-k} \\ &= \frac{X}{n} \frac{d}{dX} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-Y)^{n-k} \right) = \frac{X}{n} \frac{d}{dX} ((X + 1 - Y)^n) = X(X + 1 - Y)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} X^k (1-Y)^{n-k} = X(X+1-Y)^{n-1}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

c) On suppose dans ce paragraphe que : $\forall x \in [0, 1], f(x) = x(x-1)$.

Si, pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) = x(x-1)$, alors pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1er calcul. Pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$k(n-k)C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} = n(n-1)C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} B_n(f) &= -\frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} X^{k-1} (1-X)^{(n-2)-(k-1)} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k X^k (1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X)(X+1-X)^{n-2} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-X). \end{aligned}$$

L'égalité précédente restant vraie pour $n = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-X).$$

2 ème calcul.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-Y)^{n-k} &= -\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k) X^k (1-Y)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial Y} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-Y)^{n-k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} X(1-Y) \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial}{\partial Y} ((X+1-Y)^n) \right) = -n(n-1) \frac{1}{n^2} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2} \\ &= -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-Y)^{n-k} = -\frac{n-1}{n} X(1-Y)(X+1-Y)^{n-2}.$$

En particulier, quand $Y = X$, on retrouve le résultat précédent .

d) Calcul de $\sum_{k=0}^n C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_n^k (k-nX)^2 X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k k^2 X^k (1-X)^{n-k} - 2nX \sum_{k=0}^n k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n C_n^k X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k k(k-n) X^k (1-X)^{n-k} - n(2X-1) \sum_{k=0}^n k C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \\ &= n^2 \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) X^k (1-X)^{n-k} - n^2 (2X-1) \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k X^k (1-X)^{n-k} + n^2 X^2 \end{aligned}$$

et donc les résultats de a), b) et c)

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1 - X)^{n-k} = n^2 \left(-\frac{n-1}{n} X(1-X) - (2X-1)X + X^2 \right) = n^2 \left(-\frac{1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X \right) = nX(1-X).$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n C_n^k (k - nX)^2 X^k (1 - X)^{n-k} = nX(1-X).$$

3) Convergence uniforme de la suite des polynômes de BERNSTEIN

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On va montrer que la suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

a) Une majoration de $|f(x) - B_n(f)(x)|$.

Soit x un réel de $[0, 1]$ et n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| f(x) \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \quad (\text{d'après 1)a}) \\ &= \left| \sum_{k=0}^n C_n^k \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

b) Pourquoi l'expression précédente est-elle petite ?

Tout d'abord, $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$ est une expression bornée uniformément en x .

Ensuite, pour x donné et pour des k tels que $\left| x - \frac{k}{n} \right|$ est petit, $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ est petit. Pour les k tels que $\frac{k}{n}$ est assez éloigné de x et décrivant donc un sous-ensemble J de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ est bornée uniformément en x et il n'y a qu'à espérer que $\sum_{k \in J} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ soit petit. Mais là, on dispose de

$$\sum_{k \in J} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n} \dots$$

c) Soit ε un réel strictement positif.

f est continue sur le segment $[0, 1]$ et est donc d'une part bornée sur ce segment, et d'autre part uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Par suite, il existe un réel M tel que pour tout x de $[0, 1]$, $|f(x)| \leq M$ et il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

d) Soient n un entier naturel non nul et x un réel de $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \sum_{k=0}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| < \alpha}}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| < \alpha}}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{\substack{k=0 \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \alpha}}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^n C_n^k \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} \text{ (d'après 1)),}
\end{aligned}$$

(dans la deuxième somme, l'inégalité $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha$ s'écrit encore $1 \leq \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2}$) et donc :

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\alpha^2} \frac{1/4}{n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2},$$

(si $x \in [0, 1]$, $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$). En résumé, $\varepsilon > 0$ strictement positif ayant été donné, on a montré que :

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}.$$

Or, $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$ tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier naturel non nul n_0 tel que tout entier naturel $n \geq n_0$, $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et donc pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon$.

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - B_n(f)(x)| < \varepsilon,$$

et donc que

La suite $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ des polynômes de BERNSTEIN converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

4) Le théorème de WEIRSTRASS.

D'après 2), toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes. Plus généralement, soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = f((b-a)x + a).$$

Comme la fonction $x \mapsto (b-a)x + a$ est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[a, b]$ (de réciproque la fonction $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$) et que f est continue sur $[a, b]$, g est continue sur $[0, 1]$. Il existe alors une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers g sur $[0, 1]$.

Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[a, b]$, posons

$$P_n(x) = Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour x dans $[0, 1]$ et $n \geq n_0$, $|g(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$. Mais alors, pour $n \geq n_0$ et x dans $[a, b]$,

$$|f(x) - P_n(x)| = \left| g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - Q_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon.$$

car $\frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0, 1]$.

On a montré que :
<http://www.maths-france.fr>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq n_0 \Rightarrow |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

et donc la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. D'où le :

Théorème de WEIRSTRASS. Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.

5) Peut-on généraliser à $\mathbb{R}$?

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f . Nous allons montrer que f est nécessairement un polynôme.

D'après le critère de CAUCHY uniforme, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $p \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_p(x)| \leq 1,$$

et en particulier pour $n \geq n_0$ et x réel,

$$|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 1.$$

Pour $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est borné sur $\mathbb{R}$ et donc constant. Par suite,

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = P_{n_0}(x) + P_n(0) - P_{n_0}(0).$$

Quand n tend vers $+\infty$ à x fixé, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P_{n_0}(x) - P_{n_0}(0) + f(0).$$

On a montré que :

Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f ,
 f est nécessairement un polynôme.

Ce résultat montre que les séries entières usuelles de rayons infini (de somme e^x ou $\cos x$...) ne sont pas uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$.