EL Bilia Sup
Prepas MP

Prof. MAMOUNI
myismail.net

PREPARATION
CONCOURS

EVN : Distance à une partie

Partie I : Generalités

E evn et $A \subset E$ et $x \in E$

on pose $\boxed{d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a)}$

① Mq l'app^t $f : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A)$ est bien definie

et 1-lipschitzienne (donc continue)

② Mq $\exists (a_n) \subset A$ tq $\boxed{d(x,A) = \lim_{n \to +\infty} d(x, a_n)}$

caracterisation Sequentielle

indic : Utiliser la prop caract de la borne inf

③ En deduire que $d(x,A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

④ On suppose que A est compact

ⓘ Mq $\exists a \in A$ tq $d(x,A) = d(x,a)$

ⓘⓘ a est-il unique

⑤ ⓘ Mq $d(x,A) = d(x,\bar{A})$

ⓘⓘ Mq 4-i est encore vrai si A est fermé en dim finie

Partie II : distance à un convexe fermé

On suppose E ev euclidien et A convexe fermé

on rappelle que $\exists (a_n) \subset A$ tq $d(x,A) = \lim_{n \to +\infty} d(x,a_n)$

1) Mq (a_n) est bornée

2) En deduire que $\exists (a_{\varphi(n)})$ tq $a_{\varphi(n)} \to a \in A$ $\exists a \in A$

3) En deduire que $\exists a \in A$ tq $\boxed{d(x,A) = d(x,a)}$

4) On suppose que $\exists b \in A$ tq $d(x,A) = d(x,b)$

i) Mq $\left\| \frac{a+b}{2} - x \right\|^2 = d^2(x,A) - \frac{1}{4}\|a-b\|^2$

ii) En deduire que $a = b$

5) Ainsi $\forall x \in E$, $\exists! a \in A$ tq $d(x,A) = d(x,a)$

i) Mq $\forall t \in [0,1]$ $\forall b \in A$ on a $\|x - ((1-t)a + tb)\|^2 \geq d^2(x,A)$

ii) En deduire que $-2t\langle x-a, b-a\rangle + t^2\|b-a\|^2 \geq 0$

iii) Conclure que $-\langle x-a, b-a\rangle \geq 0$ $\forall b \in A$

6) Inversement Soit $x \in E$, $a \in A$ tq $-\langle x-a, b-a\rangle \geq 0$ $\forall b \in A$

i) Verifier que $\|b-x\| \geq \|x-a\|$ $\forall b \in A$

ii) En deduire que $d(x,A) = d(x,a)$

Partie III | Generalités sur les hyperplan

Forme lineaire : $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineaire

Hyperplan : H sev de E tq $\exists a \in E$, verifiant $E = H \oplus \mathbb{R}a$

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ forme lineaire Non nulle et $a \in E$ tq $\varphi(a) \neq 0$

   i. Mq $E = \ker \varphi \oplus \mathbb{R}a$

   ii. Que peut-on conclure

2. Inverst Soit H hyperplan de E et $a \in E$ tq $E = H \oplus \mathbb{R}a$

   i. Justifier que $\forall x \in E$ $\exists! h_x \in H$, $\exists! \lambda_x \in \mathbb{R}$ tq

   $$x = h_x + \lambda_x a$$

   ii. Mq $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda_x$ est bien definie et lineaire

   iii. Verifier que $\ker \varphi = H$

3. $\boxed{\text{Que peut-on conclure}}$

4. Soit H hyperplan de E ie $E = H \oplus \mathbb{R}a$ et G sev de E tq $H \subset G$

   i. on suppose que $a \in G$, Mq $G = E$

   ii. on suppose que $a \notin G$, Mq $G = H$

   indic : par l'absurde

   iii. Que peut-on conclure

(5) Soit F sev de E, mq $\bar{F}$ aussi sev

(6) On deduire que tout hyperplan est soit fermé soit dense dans E

(7) Soit $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ un hyperplan de E tq φ cont, mq H est fermé

(8) On suppose que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ hyperplan fermé

on suppose de plus que φ n'est pas continue

(i) Justifier que φ est discontinue en 0

(ii) On deduire que $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x_n \in E)$ tq $\lim\limits_{+\infty} x_n = 0$ et $|\varphi(x_n)| > \varepsilon$

(iii) Construire une suite $(y_n) \subset E$ tq $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$ et $\varphi(y_n) = 1$

(iv) Construire une suite $(z_n) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ tq $z_n \to z \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$

(v) On deduire une contradiction

(vi) Que peut-on conclure

(9) Donner une conclusion gle

Partie IV | Distance à un hyperplan

On suppose dans cette partie que $H = \operatorname{Ker}\varphi$ hyperplan fermé

car φ continue

et on considère $a \notin H$ (fixé)

on rappelle que $|||\varphi||| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$

Mq
$E = H \oplus \mathbb{R}a$

① a) Mq $\forall h \in H$ on a $\boxed{d(a, h) \geq \frac{|\varphi(a)|}{|||\varphi|||}}$

Indice : $\varphi(a) = \varphi(a - h)$

ii) En deduire $d(a, H) \geq |\varphi(a)| / |||\varphi|||$

② Justifier l'existe d'une suite $x_n \neq 0$ tq

$$\boxed{|||\varphi||| = \lim_{n \to +\infty} \frac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|}}$$

③ En deduire que $\frac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} \leq \frac{|\varphi(a)|}{d(a,H)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Indice $x_n = h_n + \lambda_n a$

④ Conclure que $d(a, H) = \frac{|\varphi(a)|}{|||\varphi|||}$

⑤ Application : Soit $H \subset \mathbb{R}^n$ d'eq $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

Mq $d(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$

$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E$

/ Partie V | thm de Riesz

① On suppose que E evn de dim finie

Mq $B(0,1)$ compact

② Soit F sev de E tq $F \neq E$ et F fermé

(i) Justifier l'existe de $x \in E \setminus F$ et $r > 0$

tq $B(x,r) \cap F = \phi$

(ii) En deduire que $d(x,F) \geq r$

(iii) En deduire que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_0 \in F$ tq

$$d(x,F) \leq \|x - y_0\| \leq d(x,F) + \varepsilon$$

(iv) " " $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_0 \in F$ tq

$$d(x,F) \leq \|x - y_0\| \leq \frac{d(x,F)}{1-\varepsilon}$$

(v) on pose $z = \dfrac{x - y_0}{\|x - y_0\|}$

(i) Verifier que ~~x ...~~

$\forall y \in F$, on a $z - y = \dfrac{x - y_1}{\|x - y_0\|}$ où $y_1 = y_0 + \|x - y_0\|$

(ii) Conclure que $\boxed{\|z - y\| \geq 1 - \varepsilon \quad \text{avec } \|z\| = 1}$

$\forall y \in F$ Lemme de Riesz

puis que $\boxed{d(z,F) \geq 1 - \varepsilon}$

6

7) On suppose ds cette question que $\dim E = \infty$

i) Justifier l'existence de F_n ds sev de E tq $F_n \subset F_{n+1}$ et $F_n \neq F_{n+1}$

ii) On deduire que $\exists y_n \in F_{n+1}$ tq $\|y_n\| = 1$ et $d(y_n, F_n) \geq \frac{1}{2}$

iii) On deduire que $\|y_n - y_m\| \geq 1/2 \quad \forall n \neq m$

iv) En deduire que $B(0,1)$ n'est pas compact

v) Que peut-on conclure

8) Justifier ce resultat : thm de Riesz

$$\boxed{\dim E < \infty \iff B(0,1) \text{ compact}}$$

FIN ET BONNE CHANCE