

Préparation aux Concours (CNC)

Probabilités Continues

Thème 1 : Lois Usuelles

Exercice 1 La loi gamma à "deux" paramètres.

b et ν sont deux réels strictement positifs. On pose : $\forall t \in]-\infty, 0], f(t) = 0$ et $\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = \frac{t^{\nu-1} e^{-\frac{t}{b}}}{b^{\nu} \Gamma(\nu)}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. On dit que X suit la **loi gamma** de paramètres b et ν . On écrit $X \hookrightarrow \Gamma(b, \nu)$.

a) Que dire si $\nu = 1$ (resp. $b = 1$) ?

b) Que dire de $\frac{1}{b} X$? Envisager une réciproque.

Q3. a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k et le calculer.

b) Vérifier que $E(X) = b\nu$ et $V(X) = b^2\nu$.

Q4. a) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent respectivement une loi gamma de paramètres b et ν_1 , et b et ν_2 .

Montrer que $X_1 + X_2$ suit la loi gamma de paramètres b et $\nu_1 + \nu_2$.

b) Plus généralement $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_i)$ alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \Gamma(b, \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n)$.

c) $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

Montrer que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi gamma de paramètre $\frac{1}{\lambda}$ et n .

Exercice 2 Loi de Pareto

α et x_0 sont deux réels strictement positifs. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha x_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f . On dit que X suit la **loi de Pareto** de paramètres α et x_0 . On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{VP}(\alpha, x_0)$.

Q2. Donner la fonction de répartition F_X de X .

Q3. a) $E(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_0$.

b) $V(X)$ existe si et seulement si $\alpha > 2$ et dans ce cas $V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} x_0^2$.

► On ajoute parfois un paramètre C telle que $x_0 + C > 0$ (à la place de $x_0 > 0$).

$$f \text{ devient : } \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{\alpha (x_0 + C)^\alpha}{(t + C)^{\alpha+1}} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

C'est la loi de Pareto à trois paramètres que l'on note $\mathcal{VP}(\alpha, x_0, C)$.

Exercice3

Loi de Cauchy

a est un réel strictement positif. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité f . On dit que X suit **la loi de Cauchy** de paramètre a . On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Q2 Trouver la fonction de répartition F_X de X .

Q3 Montrer que X , n'a pas d'espérance.

On ajoute parfois un paramètre de dispersion x_0 (au paramètre d'échelle a) et f devient : $t \rightarrow \frac{a}{\pi(a^2 + (t - x_0)^2)}$.

C'est la loi de Cauchy de paramètres x_0 et a .

Exercice4

Loi Bêta de première espèce.

α et β sont deux réels strictement positifs.

Q1. Montrer que $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$ est une intégrale convergente et strictement positive.

On pose $\forall t \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[, f_{\alpha, \beta}(t) = 0$ et $\forall t \in]0, 1[, f_{\alpha, \beta}(t) = \frac{t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$.

Q2. Montrer que $f_{\alpha, \beta}$ est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour densité $f_{\alpha, \beta}$. On dit que X suit **la loi de bêta de première espèce** de paramètres α et β . On écrit alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha, \beta)$.

Q3. a) Montrer que pour tout r dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre r .

b) Montrer que $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ et $V(X) = \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$.

c) Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}^*, E(X^r) = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{\alpha + i}{\alpha + \beta + i}$.

Exercice5

Loi de Weibull

α et λ sont des réels strictement positifs. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Q2. X est une variable aléatoire à densité f . On dit que X suit la loi de Weibull de paramètre α et λ .

On écrit $X \hookrightarrow \mathcal{W}(\alpha, \lambda)$.

- a) Trouver F_X . Montrer que X possède une espérance et une variance que l'on exprimera à l'aide de la fonction Γ .
- b) On considère la variable aléatoire $Y = \lambda X^\alpha$. Étudier Y .

Exercice6 **Approche des lois gamma.**

Pour tout réel positif t , le nombre de personnes qui entrent dans un magasin entre les instants 0 et t est une variable aléatoire N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre λt .

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Y_n est la variable aléatoire égale au temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ client dans le magasin.

Q1. Donner la fonction de répartition F_n de Y_n .

Q2. Montrer que Y_n est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité.

Examiner les cas particuliers $\lambda = 1$ et $n = 1$.

Exercice7 **Géométrie-exponentielle.**

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre a .

Soit x un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire N_x égale à $\text{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(N_x > E(N_x))$.

Exercice8 **Poisson-Gamma.**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et λ est un réel positif. X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X suit la loi gamma de paramètre n et que Y suit une loi de poisson de paramètre λ .

Démontrer que $P(X > \lambda) = P(Y < n)$.

Exercice9 **Poisson-Gamma.**

On ouvre un guichet au temps 0. Des clients se présentent successivement à ce guichet aux instants aléatoires $T_1, T_2, \dots$

On suppose que les variables aléatoires $E_1, E_2, \dots$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\begin{cases} E_1 = T_1 \\ E_2 = T_2 - T_1 \\ E_3 = T_3 - T_2 \\ \dots \end{cases}$$

sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de clients arrivant dans l'intervalle $[0, 1]$.

Q1. Montrer que T_n est une variable aléatoire réelle à densité et en donner une densité (cours).

Q2. Calculer $P[X = 0]$.

Q3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $P(X = n)$ en fonction de $P(T_{n+1} > 1)$ et de $P(T_n > 1)$.

En déduire la loi de X ou montrer que X suit une loi de Poisson !! (IPP)

Exercice10 **Loi normale. Bienaymé-Tchebychev**

x est un réel strictement positif. Montrer que $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice11

Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$.

Exercice12 **Utilisation des lois normales pour calculer des intégrales.**

a , b et c sont trois réels. On suppose que a est strictement positif.

Existence et calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a t^2 + b t + c)} dt$.

Exercice13 **Moments d'une loi normale centrée réduite.**

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k et le calculer.

Exercice.14 **Loi normale.**

Q1. a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et φ une densité de X (nous pourrions prendre la densité de X continue sur $\mathbb{R}$).

Montrer que X admet des moments à tous les ordres. Préciser les moments d'ordre 1, 2 et 3.

Calculer le moment d'ordre 4 en remarquant que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -t^3 \varphi'(t) dt$, où φ' désigne la dérivée de φ .

b) On suppose maintenant que X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

En écrivant X sous la forme $X = \sigma X^* + m$, calculer $E(X^2)$, $E(X^4)$, puis $V(X^2)$ en fonction de m et de σ .

Q2. Un point se déplace dans le plan rapporté à un repère orthonormé, en partant de l'origine à l'instant 0.

Si à l'instant $t = k - 1$, le point se trouve en (u_{k-1}, v_{k-1}) , à l'instant $t = k$, il se trouvera en $(u_{k-1} + X_k, v_{k-1} + Y_k)$, où X_k et Y_k suivent des lois normales $\mathcal{N}(a, 1)$.

Ainsi, au temps $t = 1$, il se trouve au point de coordonnées (X_1, Y_1) , au temps $t = 2$, il se trouve en $(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)$, etc.

On suppose les variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ et $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ mutuellement indépendantes : les X_i sont indépendantes entre elles, de même que les Y_j et toutes les X_i sont indépendantes de toutes les Y_j .

► L'objectif de cette question est l'estimation de a^2 où a est défini ci-dessus.

Pour tout n entier strictement positif, on pose $A_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. (A_n, B_n) sont donc les coordonnées du point à l'instant n .

a) Quelle sont les lois de A_n , de B_n , leur espérance et leur variance ?

b) Soit $D_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ le carré de la distance du point à l'origine à l'instant n .

Exprimer $E(A_n^2)$ à l'aide de $V(A_n)$ et $E(A_n)$. En déduire $E(D_n^2)$.

Montrer que $U_n = \frac{X_n^2 + Y_n^2}{2n^2} - \frac{1}{n}$ est un estimateur sans biais de a^2 .

c) Exprimer la variance de A_n^2 à l'aide des résultats de la question 1. En déduire celle de U_n . Cet estimateur est-il convergent ?

Thème 2 : Théorème de transfert

a) Les " $\varphi \circ X$ " de base.

Exercice.15

$\mathbf{Y} = \mathbf{aX} + \mathbf{b}$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$. a est un réel non nul et b un réel.

Montrer que $Y = aX + b$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Exercice.16

$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x}) \right).$$

Exercice.17

$\mathbf{Y} = |\mathbf{X}|$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = |X|$ est une variable réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et en donner une densité.

Exercice.18

$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{X}}$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^*$, de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = \frac{1}{X}$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, g(x) = \frac{1}{x^2} f(x).$$

Exercice.19

$\mathbf{Y} = \mathbf{e^X}$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-\infty, 0], g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, g(x) = \frac{1}{x} f(\ln x).$$

Exercice.20

$\mathbf{Y} = \ln \mathbf{X}$

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, prenant ses valeurs dans $]0, +\infty[$ (ou presque sûrement dans $]0, +\infty[$), de densité f définie sur $\mathbb{R}$.

On considère la variable aléatoire $Y = \ln X$.

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité admettant pour densité g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^x f(e^x)$$

b) $\phi \circ X$ à partir de la loi uniforme.

Exercice.21 À partir de la loi uniforme.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ et $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité.

Exercice.22 À partir de la loi uniforme.

$X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$. Étude de $Y = e^{X^2-1}$.

Exercice.23 À partir de la loi uniforme.

X est une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Q1. Donner la fonction de répartition de $Y = X^2 + 1$. Calculer $E(Y)$.

Q2. Pour tout ω appartenant à Ω , on pose : $Z(\omega) = -\ln \frac{1+X(\omega)}{2}$ si $X(\omega) \neq -1$ et $Z(\omega) = 0$ si $X(\omega) = -1$. Étudier Z .

Exercice.24 À partir de la loi uniforme. Simulation d'une loi exponentielle.

Q1. a) λ est un réel strictement positif. X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

On suppose que $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln X$ est une variable aléatoire. Que dire de Y ? Et pour $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$?

b) Envisager une réciproque.

Exercice.25 À partir de la loi uniforme.

On casse un bâton de longueur 1. Le point de rupture suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Calculer la probabilité que le grand morceau soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Exercice.26 À partir de la loi uniforme.

Un bâton de longueur 1 et d'extrémités A et B est cassé en deux au hasard. La longueur L du morceau d'extrémité A suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q1. Étudier la variable aléatoire X égale à la longueur du plus petit morceau et calculer son espérance.

Q2. Même chose avec la longueur du plus grand morceau.

Q3. Soit Z la variable aléatoire égale au rapport de la longueur du plus petit morceau à celle du plus grand. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice.27 À partir de la loi uniforme.

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p . X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice.28 À partir de la loi uniforme.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}$$

Soit Y la variable aléatoire définie par : pour tout ω dans Ω , $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de M_ω .

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

Exercice.29 À partir de la loi uniforme.

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Déterminer toutes les fonctions g continues et strictement monotones de $]0, 1[$ sur $g(]0, 1[)$ telles que la variable aléatoire $Y = g(X)$ suive la loi exponentielle de paramètre 1.

c) $\phi \circ X$ à partir de la loi exponentielle

Exercice.30 À partir de la loi exponentielle.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Donner la loi de $Y = e^X$. Existence et valeur du moment d'ordre k .

Exercice.31 À partir de la loi exponentielle.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère la variable aléatoire réelle $Y = \sqrt{X}$.

Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Exercice.32 À partir de la loi exponentielle.

X est une variable aléatoire de densité f paire et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y = X^2$ et on suppose que : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer f .

Exercice.33 À partir de la loi exponentielle. Piège...

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X suit la loi exponentielle de paramètre λ et Y suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. $Z = XY$.

Z est-elle une variable aléatoire discrète ? à densité ?

Thème 3 : Applications en Géométrie

Exercice.34 Variables aléatoires réelles à densité et géométrie

Un point M se promène au hasard à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon de R .

La probabilité pour que M se trouve dans une portion de la boule est proportionnelle au volume de cette portion.

Étudier la variable aléatoire X égale à la distance de O à M (... $4\pi R^3/3$). Calculer $E(X)$.

Exercice.35 Variables aléatoires réelles à densité et géométrie

$\mathcal{R}$ est un repère orthonormé d'origine O du plan $\mathcal{P}$. A et B sont les points de coordonnées $(1, 1)$ et $(-1, 1)$. On choisit au hasard un point dans le triangle OAB . X (resp. Y) est la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse (resp. ordonnée) de ce point. On admet que la probabilité pour que le point obtenu soit dans une partie du triangle est proportionnelle à l'aire de cette partie.

Q1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en trouver une densité. Calculer $E(Y)$.

Q2. Reprendre le problème avec X .

Exercice.36 Variables aléatoires réelles à densité et géométrie

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$. On tire sur la cible représentée par le carré de sommets O, I, K, J de coordonnées respectives $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$. On suppose que pour toute partie A de la cible, la probabilité que le point d'impact soit dans A est égale à l'aire de A .

On note X et Y les coordonnées aléatoires du point d'impact.

Q1. Étudier X et Y .

Q2. Soit Z la variable aléatoire égale au produit XY . Déterminer $Z(\Omega)$. Pour tout t dans $Z(\Omega)$, que représente graphiquement $\{Z \leq t\}$.

Trouver la loi de Z . Calculer, si possible son espérance et sa variance.

Q3. Mme chose avec $T = Y/X$.

Q4. Étudier $U = [T]$ (partie entière).
