Prépas MP

Probabilités à Densité

Lois Classiques

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُومْنِي مُولَايِ اسْمَاعِيل

1 Loi Gamma

Définition 1.1: Loi Gamma

Une v.a X suit la loi Gamma de paramètres p et θ ($p > 0$, $\theta > 0$), notée $\gamma(p, \theta)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta x} x^{p-1} \ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

avec $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$.

Caractéristiques de la loi Gamma

Espérance : $\frac{p}{\theta}$.
Variance : $\frac{p}{\theta^2}$.
Fonction de répartition : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta t} t^{p-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$.
Fonction caractéristique : $\Phi_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - it}\right)^p, \quad t \in \mathbb{R}$.

Remarquons que la loi gamma de paramètre 1 est θ est simplement la loi exponentielle de paramètre θ.

Proposition 1.1: Propriétés de la fonction Γ

1. $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \quad \forall p > 1$,
2. $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration. Démontrons ces propriétés.

1. Pour tout $p > 1$, une intégration par partie conduit à

$$\begin{aligned} \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \mathrm{d}x &= \lim_{T \to \infty} \left(\left[x^{p-1}(-e^{-x})\right]_0^T - \int_0^T (p-1)x^{p-2}(-e^{-x}) \mathrm{d}x \right) \\ &= (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} \mathrm{d}x \\ &= (p-1)\Gamma(p-1). \end{aligned}$$

2. Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \mathrm{d}x = 1$, une récurrence montre que pour tout entier non nul n : $\Gamma(n) = (n-1)!$, en utilisant évidemment la propriété précédente.

3. On calcule, en effectuant le changement de variable $t = \sqrt{2x}$ (donc $\mathrm{d}x = t\mathrm{d}t$) :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{-1/2}\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\right)^{-1/2} t\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

On a utilisé que la densité de la loi normale est bien une densité : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = 1$.

On calcule l'espérance d'une loi Gamma, on utilise dans le calcul le changement de variable $u = \theta x$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\theta^p}{\Gamma(p)}e^{-\theta x}x^{p-1}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} e^{-\theta x}(\theta x)^p\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} e^{-u}u^p\frac{\mathrm{d}u}{\theta}\\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\theta\Gamma(p)}\\ &= \frac{p}{\theta}.\end{aligned}$$

Le calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se fait de la même façon. On trouve : $\mathbb{E}(X^2) = \frac{p(p+1)}{\theta^2}$. On en déduit que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{p}{\theta^2}.$$

□

Théorème 1.1: Additivité de lois gamma indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** suivant respectivement les lois $\gamma(p,\theta)$ et $\gamma(q,\theta)$. Alors la variable aléatoire réelle $X+Y$ suit la loi $\gamma(p+q,\theta)$.

Démonstration. Puisque les variables X et Y sont indépendantes, la fonction caractéristique de la somme est égale au produit des fonctions caractéristiques. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = \left(\frac{\theta}{\theta - it}\right)^p\left(\frac{\theta}{\theta - it}\right)^q = \left(\frac{\theta}{\theta - it}\right)^{p+q}.$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi Gamma de paramètres $p+q$ et θ. □

2 Loi du χ^2

Définition 2.1: Loi du χ^2 à n degrés de libertés

Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n variables i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors la loi de $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ est appelée loi du χ^2 à n degrés de libertés.

Une v.a X suit la loi du χ^2 à n degrés de libertés, notée χ^2_n si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\ e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caractéristiques de la loi du χ^2

Espérance : n.
Variance : $2n$.
Fonction de répartition : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{t}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$.
Fonction caractéristique : $\Phi_X(t) = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Proposition 2.1: Lien entre la loi gamma et la loi du χ^2

On a :

$$\chi_n^2 \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Démonstration. Déterminons d'abord la loi de χ_1^2 c'est à dire la loi du carré d'une v.a. $\mathcal{N}(0,1)$. Soit donc $Y_1 = X_1^2$ avec $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

$$F_{Y_1}(x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x) = \mathbb{P}(X_1^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathbb{P}(|X_1| \leq \sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donc si $x \geq 0$ on a :

$$F_{Y_1}(x) = \mathbb{P}(|X_1| \leq \sqrt{x}) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X_1| \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$

Cette dernière fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée :

$$f_{Y_1}(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\phi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x/2}.$$

La densité de Y_1 est donc bien la densité de la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_{Y_1}(x) = \frac{(1/2)^{1/2}}{\Gamma(1/2)} e^{-\frac{1}{2}x} x^{-1/2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Donc $\chi_1^2 \sim \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En utilisant la propriété d'additivité de la loi Gamma (démontrée dans le paragraphe précédent), on voit que si

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

avec les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n variables i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X est la somme de n v.a. indépendantes de loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et donc $X \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. □

Comme on a calculé l'espérance, la variance et la fonction caractéristique d'une loi gamma dans le paragraphe précédent, on en déduit facilement l'espérance, la variance et la fonction caractéristique d'une loi du χ^2 à n degrés de libertés.

Une autre conséquence est que si $X \sim \chi_m^2$ et $Y \sim \chi_n^2$ avec X et Y indépendantes, alors

$$X + Y \sim \chi_{n+m}^2.$$

En effet : $X \sim \gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ donc, par indépendance,

$$X + Y \sim \gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \gamma\left(\frac{n+m}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi_{n+m}^2.$$

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

Définition 2.2: Loi de Student

Soient X et Y deux variables indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. Alors la variable aléatoire $T_n = \dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit la loi de Student à n degrés de libertés.

Une variable aléatoire X suit la loi de Student à n ddl si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Caractéristiques de la loi de Student

Espérance : 0 si $n > 1$.
Variance : $\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$.

La loi de Student à 1 ddl est aussi appelée Loi de Cauchy. Sa densité est, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+x^2}$ et elle n'admet pas d'espérance.

3 Loi de Fisher-Snedecor

Définition 3.1: Loi de Fisher-Snedecor

Soient X et Y deux variables indépendantes telles que $X \sim \chi^2_m$ et $Y \sim \chi^2_n$. Alors la variable aléatoire $F = \frac{X/m}{Y/n}$ suit la loi de Fisher-Snedecor à (m,n) degrés de libertés.
Une variable aléatoire X suit la loi de de Fisher-Snedecor à (m,n) ddl, notée $F(m,n)$ si sa densité est :

$$f(x) = m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caractéristiques de la loi de Fisher-Snedecor

Espérance : $\frac{n}{n-2}$ si $n \geq 3$.
Variance : $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ si $n \geq 5$.

Remarquons que :

1. Si $T \sim$ Student à n ddl alors $T^2 \sim F(1,n)$,
2. Si $F \sim F(m,n)$ alors $\dfrac{1}{F} \sim F(n,m)$.