Probabilités Continues

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

4 Estimation ponctuelle.

Quelques définitions :

1. Lorsque $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables indépendantes de même loi μ_θ dépendant d'un paramètre θ qui peut prendre ses valeurs dans un intervalle Θ, on dit que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un **n-échantillon** de μ_θ ;
2. Un **estimateur** (de rang n) est une v.a.r. T_n fonction de $X_1, \ldots, X_n$;
3. Si : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}_\theta(T_n) = g(\theta)$, T_n est un **estimateur sans biais** de $g(\theta)$;
4. Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}_\theta(T_n) = g(\theta)$, T_n est un **estimateur asymptotiquement sans biais** de $g(\theta)$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_\theta(T_n) = \mathbb{E}_\theta(T_n) - g(\theta)$ est le **biais** de T_n ;
6. Le **risque quadratique** de T_n est $r_\theta(T_n) = \mathbb{E}_\theta((T_n - g(\theta))^2)$;
7. L'estimateur T_n est **convergent** s'il tend en probabilité vers $g(\theta)$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour calculer le risque quadratique,

1. $r_\theta(T_n) = \mathbb{V}_\theta(T_n) + \big[b_\theta(T_n)\big]^2$;
2. En particulier, si T_n est sans bais, alors $r_\theta(T_n) = \mathbb{V}_\theta(T_n)$.

Pour établir la convergence de l'estimateur,

1. si T_n est fonction continue $f(\overline{X}_n)$ de la moyenne empirique $\overline{X}_n$ de n v.a.r. possédant une espérance m et une variance, alors T_n est un estimateur convergent de $f(m)$ (la convergence de $\overline{X}_n$ vers m découlant de la loi faible des grands nombres) ;
2. sinon, il suffit d'avoir
$$r_\theta(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
pour affirmer que T_n converge.
En particulier, si l'estimateur est sans biais ou s'il est asymptotiquement sans biais (donc $b_\theta(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), il suffit que :
$$\mathbb{V}_\theta(T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
pour affirmer que T_n converge.

5 Estimation par intervalle de confiance.

Quelques définitions :

5.1 Estimation par intervalle de confiance

Soit $\alpha \in [0;1]$. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites d'estimateurs de $g(\theta)$. On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ (ou au risque α) si, pour tout θ de Θ,
$$\mathbb{P}_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha.$$
La réalisation sur un échantillon fournit une estimation de cet intervalle de confiance.

5.2 Estimation par intervalle de confiance asymptotique

Soit $\alpha \in [0;1]$. Soit $(U_n)_{n\geqslant 1}$ et $(V_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites d'estimateurs de $g(\theta)$. On dit que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1-\alpha$ (ou au risque α) si, pour tout θ de Θ, il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de réels de $[0;1]$, de limite α, telle que :
$$\forall n \geqslant 1, \mathbb{P}_\theta([U_n \leqslant g(\theta) \leqslant V_n]) \geqslant 1-\alpha_n.$$
La réalisation sur un échantillon fournit une estimation de cet intervalle de confiance asymptotique.

5.3 Construction d'intervalles de confiance

Lorsque l'écart-type σ n'est pas connu, on peut utiliser un estimateur convergent S_n de σ construit à l'aide des X_i (ou/et de $\overline{X}_n$).

Dans ce cas , on utilise le **théorème de Slutsky** :
$$\left.\begin{array}{l} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \sigma(>0) \\ \overline{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sigma}{S_n}\overline{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$$
Voir la fiche du même nom, notamment le paragraphe **3. Bilan**.

Remarque sur les notations

La plupart des exercices ne cherchent pas à estimer $g(\theta)$ (*i.e.* une fonction quelconque de θ) mais directement θ, puisque si $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, alors $g(T_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(\theta)$ pourvu que g soit continue.

De plus, on ne s'encombre en général pas de la notation $\mathbb{P}_\theta$, $\mathbb{E}_\theta$ et $\mathbb{V}_\theta$, et on lui préfère la notation usuelle $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$.