

Préparation aux Concours (CNC)

Probabilités Continues

La formule de Stirling

1 Le développement.

Proposition 1. On a $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Démonstration.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre 1. Posons: $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ et $Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$. Notons que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et que $Z_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

Étape 1: Appliquer le théorème central limite à la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$.

$(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de va iid et pour tout n , $X_n \in L^2$. Les hypothèses du théorème central limite sont ainsi satisfaites avec de plus $\mathbb{E}(X_1) = \sqrt{\mathbb{V}(X_1)} = 1$. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Z_n > t) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} > t\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \mathbb{P}(Z > t)$$

où Z suit une loi normale centrée réduite.

Étape 2: Appliquer le théorème de convergence dominée à la suite

$(\mathbb{P}(Z_n > t))_{n \geq 1}$.

Soit $t > 0$. Comme $\{Z_n > t\} \subset \{Z_n^2 > t^2\}$, on a:

$$\mathbb{P}(Z_n > t) \leq \mathbb{P}(Z_n^2 > t^2) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

On en déduit $\mathbb{P}(Z_n > t) \leq \mathbf{1}_{]0;1[} + \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{[1;+\infty[} \in L^1$. Le théorème de convergence dominée donne alors:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t) dt.$$

Étape 3: Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t) dt$

Allons y gaiement. On a:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right) dt,$$

puis par Fubini-Tonelli:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) dt du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Étape 4: Calculer $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt$

Allons y gaiement. On a:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{nt} + n) dt.$$

En vertu du théorème de transfert,

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n > \sqrt{nt} + n) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbf{1}_{\{k > \sqrt{nt} + n\}} dt$$

puis par Fubini-Tonelli, nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \mathbf{1}_{\{k > \sqrt{nt} + n\}} dt = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_0^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}} \mathbb{P}(S_n = k) dt.$$

Comme $\mathbb{P}(S_n = k) = \exp(-n) \frac{n^k}{k!}$, la transitivity de la relation $=^1$ donne:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} (k - n) \exp(-n) \frac{n^k}{k!}.$$

Après simplification on obtient², on trouve:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt = \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n} \exp(n) n!}.$$

Conclusion.

D'après ce qui précède, on a:

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n > t) dt = \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n} \exp(n) n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z > t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où le résultat.

□