Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُولَاي اسماعيل تَمَوْنِي

Préparation aux Concours (e3a-CNC-CCP)

Probabiltés Discrètes

Extraits Concours (2016-2023)

CNC 2023

Dans cet exercice, $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$.

1.1.1. Justifier que si $\alpha\neq\beta$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Montrer que si $\alpha=\beta$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette section, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2, avec $(p_1,p_2)\in]0,1[^2$; c'est-à-dire

$$X\hookrightarrow\mathcal{G}(p_1)\quad\text{et}\quad Y\hookrightarrow\mathcal{G}(p_2).$$

1.2.1. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, rappeler l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(X=k)$ en fonction de k et p_1.

1.2.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U=X+Y$ selon les valeurs des paramètres p_1 et p_2. *On précisera d'abord l'ensemble des valeurs de la variable aléatoire U.*

1.2.3. Montrer que la variable aléatoire $V=\min(X,Y)$ suit une loi géométrique de paramètre $1-(1-p_1)(1-p_2)$. *On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}(V>k)$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.*

1.2.4. Montrer que $\mathbb{P}(X<Y)=\dfrac{p_1(1-p_2)}{p_1+p_2-p_1p_2}$.

1.2.5. On considère la variable aléatoire discrete $M:\Omega\longrightarrow\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ par :

$$\forall\, w\in\Omega,\quad M(w)=\begin{pmatrix}X(w) & 1\\ 0 & Y(w)\end{pmatrix}.$$

Calculer, en fonction des paramètres p_1 et p_2, la probabilité que la matrice M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e3a 2022

1. **Questions de cours**

   (a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
   Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

   (c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d' une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

$* * * * **$

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j)$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

e3a 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

e3a 2020

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2-t}$.
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2-t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.
6. **Calculs d'espérances et de variances.**
   - 6.1. Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
   - 6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.
   - 6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.
   - 6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.
   - 6.5. S.

CCP 2021

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \ .$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x} \ .$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a, b) \in A\ ,\ ab = n\}$.

Partie III - Produit eulérien

Soit $s > 1$ un réel fixé. On définit une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s) k^s}.$$

On rappelle qu'un entier a divise un entier b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. On note alors $a|b$.

Q15. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $P(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^s}$.

Q16. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ dans $\mathbb{N}^*$ des entiers premiers entre eux deux à deux et $N \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer par récurrence sur n que :

$$(a_1|N, a_2|N, \dots, a_n|N) \Leftrightarrow a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n|N.$$

Le résultat persiste-t-il si les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont seulement supposés premiers dans leur ensemble, c'est-à-dire lorsque leur PGCD vaut 1 ?

Q17. En déduire que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers de $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, alors les événements $[X \in a_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in a_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
On pourra noter $(b_1, \dots, b_r)$ une sous-famille de la famille $(a_1, \dots, a_n)$.

On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite croissante des nombres premiers.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega)$ n'est divisible par aucun des nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que :

$$P(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

Q19. Soit ω dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$. Que vaut $X(\omega)$? En déduire que :

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

On se propose, en application, de prouver que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ converge.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.$$

Q20. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $l \geq \zeta(s)$.
Conclure.

CCP 2020

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n\geq 1, N\geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$
$$\text{avec } \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 0\big) = \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 1\big) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbb{P}\big(T_{n,N} = 2\big) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose : $X_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}$.

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Q16. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leur valeur en fonction de N.

Q17. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) = 0$

Q18. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que : $\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0$.

CCP 2019

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$p_n = P(X = n)$, la fonction génératrice de X est $G_X(t) = E(t^X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Q2. Démontrer que l'intervalle $]-1,1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On pose $S = X_1 + X_2$, démontrer que pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = E(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer pour tout $t \in]-1, 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n.

CCP 2016

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{P}(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

CCP 2018

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q4. Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,....\,\frac{n-k+1}{n}\right] = 1$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q5. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q6. Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0,6}$.

CCP 2015 & CNC 2016

Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x \in [0,1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0,1]$, $C_n(f)(x) = E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

(a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

(b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0,1] \times [0,1]$, $|x_1 - x_2| \leq \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n} \right) \right| \leq \dfrac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

CCP 2018

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q4. Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n}{n}\,\dfrac{n-1}{n}\,....\,\dfrac{n-k+1}{n}\right] = 1$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q5. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q6. Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0{,}6}$.

e3a 2018

Soient a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$. On rappelle que $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.

Si S est un ensemble fini, on note $|S|$ son cardinal.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit ℓ un entier naturel non nul. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1, \ell]\!]$.

On note U_n le nombre de valeurs distinctes prises par les variables $X_1, \ldots, X_n$: Si $k_1, ..., k_n$ sont les valeurs prises respectivement par les variables $X_1, \ldots, X_n$, alors U_n prend la valeur $|S|$ où $S = \{k_1, ..., k_n\}$, pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$.

Si S est une partie de $[\![1, \ell]\!]$, on note « $\{X_1, ..., X_n\} = S$ » la réunion des événements « $(X_1, ..., X_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ » , pour tout $(k_1, ..., k_n)$ dans $[\![1, \ell]\!]^n$ tels que $S = \{k_1, ..., k_n\}$.

1. On suppose dans cette question seulement $n = 2$ et $\ell \geq 2$.

   (a) Justifier que U_2 ne prend que les valeurs 1 et 2.

(b) Calculer $P(U_2 = 1)$ et $P(U_2 = 2)$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(U_2)$.

2. On se propose de simuler en Python la variable aléatoire U_n pour $n = 10$ dans le cas où $\ell = 25$.

   (a) Ecrire une fonction `simulU` qui renvoie une réalisation de U_{10}.
   On pourra utiliser la fonction : random.randint
   L'instruction random.randint(1,25) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 25]\!]$ uniformément.

   (b) Ecrire une fonction `espU` qui renvoie une approximation de l'espérance de U_{10}.
   Quel théorème utilisez-vous pour justifier que le résultat de cette fonction est une approximation de l'espérance de U_{10} ? Enoncez précisément ce théorème.

3. Quel est l'ensemble des valeurs prises par U_n ?

4. Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Soit S une partie de $[\![1, \ell]\!]$. Quelle est la probabilité de l'événement « $X_i \in S$ » en fonction de $|S|$?

5. Soit a dans $[\![1, \ell]\!]$. Exprimer $P(X_1 \neq a, \ldots , X_{n-1} \neq a)$, la probabilité qu'aucune des variables $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne prenne la valeur a, en fonction de n et ℓ.

6. En déduire $P(X_1 \neq X_n, \ldots , X_{n-1} \neq X_n)$, la probabilité que la valeur prise par X_n soit différente de toutes les valeurs prises par les autres variables, en fonction de n et ℓ.

7. Justifier

$$P(X_1 \neq X_n \,, \ldots \,, X_{n-1} \neq X_n) = \sum_{S \in \mathcal{P}_\ell} P(\{X_1, ..., X_{n-1}\} = S) \left(\frac{\ell - |S|}{\ell}\right).$$

   où $\mathcal{P}_\ell$ désigne l'ensemble des parties non vides de $[\![1, \ell]\!]$.

8. En déduire dans le cas où $n \geq 3$:

$$\mathbf{E}(U_{n-1}) = \ell(1 - P(X_1 \neq X_n \,, \ldots \,, X_{n-1} \neq X_n))$$

9. Exprimer $\mathbf{E}(U_n)$ en fonction de n et ℓ.

10. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque ℓ est fixé et n tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

11. Déterminer la limite de $\mathbf{E}(U_n)$ lorsque n est fixé et ℓ tend vers $+\infty$. Interprétez votre résultat.

12. On s'intéresse aux possibles partages de dates d'anniversaire dans un groupe de n personnes. On suppose que les années sont toutes de 365 jours et que les dates d'anniversaire sont uniformément réparties sur chaque jour de l'année. On fait aussi l'hypothèse que les dates d'anniversaire de n personnes choisies au hasard sont indépendantes mutuellement.

Soit D_n le nombre de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes choisies au hasard.

(a) Exprimer en fonction de n le nombre moyen de dates d'anniversaire d'un groupe de n personnes, c'est-à-dire $\mathbf{E}(D_n)$.

(b) Quelle est la limite de ce nombre moyen lorsque n tend vers $+\infty$?

CCP 2016

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X=i,Y=j) = P\left[(X=i)\cap(Y=j)\right] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Autour de la fonction Digamma

Pour tout, $n \geq 2$, on pose $\psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)\right).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par: $G_X(t) = E(t^X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I

Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. Montrer que la fonction génératrice G_X est au moins définie sur l'intervalle [-1,1].
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. Donner l'expression de G_X, en précisant le domaine de définition, dans chaque cas suivant:
   a) X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0,1]$.
   b) X suit la loi binomiale de paramètre n, p, notée $\mathcal{B}(n,p)$, où $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$.
   c) X suit la loi géométrique de paramètre p, notée $G(p)$, où $p \in]0,1[$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance si, et seulement si, G_X est dérivable en 1 et dans ce cas $G'_X(1) = E(X)$.
5. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1 et dans ce cas $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.
6. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $G(p)$ de paramètre p, où $p \in]0,1[$.

Partie II

La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Soient n un entier naturel non nul et N une variable aléatoire telle que $N(\Omega) = [\![1,n]\!] = \{1,\ldots,n\}$. On suppose que pour tout k de $[\![1,n]\!]$, $P(N = k)$ est non nul. On considère n variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{1\leq i\leq n}$, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X, telle que $X(\Omega) = [\![1,m]\!]$, avec m un entier naturel non nul. On pose $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, (en particulier, sachant que l'événement $(N = h)$ est réalisé, $h \in [\![1,n]\!]$, alors $S = \sum\limits_{i=1}^{h} X_i$).

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $G_{X_1+\ldots+X_k} = G_X^k$.
2. a) Soit Y une variable aléatoire réelle qui prend un nombre fini de valeurs dans $Y(\Omega)$, montrer que $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$, où $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(Y|[N = k]) = \sum\limits_{y\in Y(\Omega)} yP((Y = y)|[N = k])$ désigne l'espérance de Y sachant l'événement $[N = k]$ et $P((Y = y)|[N = k])$ désigne la probabilité de $(Y = y)$ sachant l'événement $[N = k]$.
   b) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et pour tout réel t, $E(t^S|[N = k]) = G_X^k(t)$.
   c) En déduire que pour tout réel t, $G_S(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N = k)G_X^k(t)$.
   d) Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. En déduire que $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III

Application

On dispose d'un jeton non truqué à deux faces numérotées 1 et 2 et d'un dé tétraédrique (famille des pyramides composés de quatre faces triangulaires), équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On lance le jeton et on note N le numéro obtenu, puis on lance N fois le dé et pour chaque lancer, on note le numéro de la face d'appui du dé. Soit S la somme des numéros obtenus lors de ces N lancers, (si $N = 1$, le dé est lancé une seule fois et S est le numéro lu sur la face d'appui du dé).

1. a) Déterminer la loi de N.
   b) Donner la loi conditionnelle de S sachant $[N = k]$, pour $k = 1$, puis pour $k = 2$.
   c) En déduire la loi de S, puis son espérance et sa variance.
2. a) Identifier la variable aléatoire X telle que $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, où X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X.
   b) Déterminer les fonctions génératrices G_N et G_X et en déduire la fonction génératrice G_S.
   c) Retrouver, en utilisant la fonction génératrice G_S, la loi, l'espérance et la variance de S.

CCP 2017

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

Q1. Déterminer en justifiant la loi de X_1.

On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.

Q2. Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n\, A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ & \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Q3. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5 (on demande les résultats arrondis au centième).

Q4. Temps de premier accès à l'état 1 : on note T la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

Q5. Justifier que A est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice Q inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}.$$

Q6. Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

Q7. En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la suite de vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant n et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1, p]\!]$, la loi des variables X_n est entièrement déterminée par la donnée de la loi de X_0 et d'une matrice stochastique A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de X_n lorsque n est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux réels a et b strictement positifs et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X=0) &= \dfrac{a}{100} \\[2ex] P(X=1) &= \dfrac{b}{100} \\[2ex] P(X=2) &= \dfrac{2}{5} \\[2ex] P(X=3) &= \dfrac{21}{100} \\[2ex] P(X=4) &= \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [0, 1], G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n.$$

1) Déterminer la relation liant les réels a et b.

2) Déterminer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.

3) On suppose qu'une population évolue par générations. Étant donné un entier naturel $n \geqslant 1$, on note Z_n la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus de la n-ième génération. Le nombre de descendants de chaque individu d'une génération quelconque suit la loi de la variable aléatoire X. On pose $Z_0 = 1$.
On admet que pour tout entier naturel n, la fonction génératrice G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n vérifie la relation de récurrence :

$$G_{Z_{n+1}} = G_X \circ G_{Z_n}$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population à long terme, ce qu'on mesure par le comportement asymptotique de la suite $(P(Z_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = P(Z_n = 0)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de la fonction génératrice G_{Z_n}.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

c) Montrer que $G_X\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Montrer alors que la suite (w_n) est convergente vers un réel noté $L(a)$ appartenant à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

d) Montrer que le réel $L(a)$ est égal au réel ℓ de la partie I, en déduire une approximation de la probabilité $L(a)$ d'extinction de la population à long terme en fonction de a.

e3a 2016

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1. On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X, la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2. Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

5. Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathbf{Cov}(X, N)$.

7. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbf{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

8. On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.