



Calcul Différentiel

Les Astuces & Les Classiques

Objectifs

- Savoir calculer la différentielle dans des cas particuliers
- Savoir résoudre les EDP (équations aux dérivées partielles) :
Classique 1
- Savoir étudier les extremums de fonctions à deux variable (classique
2)

Classique 1 : EDP

EDP à deux variables : une équation différentielle d'inconnue $f(x,y)$

Pour résoudre une EDP

étape 1 : l'énoncé propose de nouvelles de variable u et v

deux cas possibles : u et v dépendent de x et y ou bien l'inverse

étape 2 : Poser $g(u,v) = f(x,y)$ puis utiliser la formule des chaînes adéquates selon le cas proposé

étape 3 : En déduire $\partial f / \partial x$ et $\partial f / \partial y$ en fct de $\partial g / \partial u$ et $\partial g / \partial v$

Injecter ces expressions dans l'EDP initiale

Trouver une nouvelle EDP facile à résoudre d'inconnu $g(u,v)$

En déduire $g(u,v)$ en fct de u et v

En déduire $f(x,y)$ en fct de x et y

x et y deux VAR
 u, v deux VAR
 on $f(x,y) = g(u,v)$

1^{er} cas x, y
 dépendent de u, v

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

2^{ème} cas : u et v
 dépendent de
 x, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}$$

Activités Visionneur de documents 19:31

5 sur 32 ID: 810 723 1442 Arrêter 200%

Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 41
Résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

Exercice 42
Résoudre sur \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \text{ via } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 43
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de l'équation aux dérivées partielles

Activités Visionneur de documents 19:33

21 sur 32 ID: 810 723 1442 Arrêter 200%

seulement si, $|x| < 1$
seulement si, $|x| < |y^2|$

La parole est à : Maths Pre...

$\leq a \max(1, y^2)$.

$\leq na^{n-1}$

Exercice 41 :

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v - u \\ y = 3u - 2v \end{cases}$$

Posons $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = (v - u, 3u - 2v)$$

ϕ est une bijection de classe C^1 (et même un C^1 -difféomorphisme)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par « $g(u, v) = f(x, y)$ » i.e.
 $g(u, v) = f(v - u, 3u - 2v)$
 $g = f \circ \phi$ est de classe C^1 et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ soit $g(u, v) = \varphi(v)$ avec φ fonction de classe C^1 .
Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x, y) = \varphi(3x + y)$ avec φ de classe C^1 .

Classique 3 : Extremums

Pour déterminer les extremum de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

étape 1 : Chercher les points critiques de f : solutions de $\partial f / \partial x_i = 0, \forall i$

étape 2 : Pour ces points critique calculer la matrice Hessienne

$$H = (\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j) \text{ (matrices symétrique)}$$

Déterminer $\text{sp}(H)$

étape 3 : Si $\text{sp}(H) \neq \{0\}$

1^{er} cas : si $\text{sp}(H) \subset [0, \infty[$, alors le point critique en question est un minimum local

2^{ème} cas : si $\text{sp}(H) \subset]-\infty, 0]$, alors le point critique en question est un maximum local

3^{ème} cas : sinon, alors le point critique en question n'est ni maximum local ni minimum local

N.B : Si $\text{sp}(H) = \{0\}$, on peut rien dire

Must Concours n=2 : Théorème de Monge

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Si f admet un point critique en (a,b)

On pose $r = \partial^2 f / \partial x^2 (a,b)$, $s = \partial^2 f / \partial x \partial y (a,b)$ et $t = \partial^2 f / \partial y^2 (a,b)$

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet en (a,b) un minimum local
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet en (a,b) un maximum local
- si $rt - s^2 < 0$, f n'admet en (a,b) ni minimum ni maximum local
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire

Demo

$$\text{sp}(H) = \{\lambda_1, \lambda_2\}, \det(H) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$\det(H) > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ de même signe}$$

Dans ce $\text{Tr}(H) = \lambda_1 + \lambda_2$ de même signe que λ_1, λ_2

Conclusion : $\det(H) > 0$ et $\text{Tr}(H) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ minimum local

$$\text{La matrice Hessienne est } (Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 (a,b) & \partial^2 f / \partial x \partial y (a,b) \\ \partial^2 f / \partial x \partial y (a,b) & \partial^2 f / \partial y^2 (a,b) \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } (Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

$$\text{Posons } \text{sp}(Hf)_{(a,b)} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

$$\text{Donc } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(Hf)_{(a,b)} = rt - s^2 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(Hf)_{(a,b)} = r + t$$

- $rt - s^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ de même signe
- $rt - s^2 > 0 \Rightarrow r$ et t de même signe car sinon $rt < 0$ et $rt - s^2 < 0$
- $r > 0 \Rightarrow t > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ CQFD

Activités Visionneur de documents 00:05

6 sur 32 CalculDiff100Classiques.pdf 250%

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Extremum

Exercice 51
Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Exercice 52
Trouver les extrema sur \mathbb{R}^2 de

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

Activités Visionneur de documents 00:07

24 sur 32 CalculDiff100Classiques.pdf 200%

Il y a u

Exercice 51 :
Points critiques $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

En $(0, 0)$: $r = 0, s = -3, t = 0$, pas d'extremum local.
 En $(1, 1)$: $r = 6, s = -3, t = 6$, minimum local. Ce n'est pas un minimum global par considération la limite de $f(t, 0)$ quant $t \rightarrow -\infty$.

Exercice 52 :
Points critiques $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

En $(0, 0)$: $r = 0, s = -4, t = 0$, pas d'extremum local.
 En $(1, 1)$: $r = 12, s = -4, t = 12$, minimum local.
 En $(-1, -1)$: $f(x, y) = f(-x, -y)$, même conclusion qu'en $(1, 1)$.

Exerci
La fonc
Après r
En $(0, 0)$
Pas d'e
En $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Il y a u

On exp

pour aff
 $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
Ainsi $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
En $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$