My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

MATH PrEPaS

Calcul Différentiel

Les Astuces & Les Classiques

Objectifs

- Savoir calculer la différentielle dans des cas particuliers
- Savoir résoudre les EDP (équations aux dérives partielles) : Classique 1
- Savoir étudier les extremums de fonctions à deux variable (classique 2)

Classique 1 : EDP

EDP à deux variables : une équation différentielle d’inconnue f(x,y)
Pour résoudre une EDP

étape 1 : l’énoncé propose de nouvelles de variable u et v

deux cas possibles : u et v dépendent de x et y ou bien l’inverse

étape 2 : Poser g(u,v) = f(x,y) puis utiliser la formule des chaînes adéquates selon le cas proposé

étape 3 : En déduire ∂f / ∂x et ∂f / ∂y en fct de ∂g / ∂u et ∂g / ∂v

Injecter ces expressions dans l’EDP initiale

Trouver une nouvelle EDP facile à résoudre d’inconnu g(u,v)

En déduire g(u,v) en fct de u et v

En déduire f(x,y) en fct de x et y

x et y deux VAR
u, v deux VAR
on f(x,y) = g(u,v)

1er cas x, y dépendent de u, v

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

2me cas : u et v dependent de x, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

Equations aux dérivées partielles d'ordre 1

Exercice 41
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \text{ via } \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases}$$

Exercice 42
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) \text{ via } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

Exercice 43
En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

Exercice 41 :

$$\begin{cases} u = 2x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v - u \\ y = 3u - 2v \end{cases}$$

Posons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u,v) = (v - u, 3u - 2v)$$

ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ (et même un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par « $g(u,v) = f(x,y)$ »i.e. $g(u,v) = f(v-u, 3u-2v)$
$g = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

f est solution de l'équation si, et seulement si, $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ soit $g(u,v) = \varphi(v)$ avec φ fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont $f(x,y) = \varphi(3x + y)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$.

Classique 3 : Extremums

Pour déterminer les extremum de $f : IR^n \rightarrow IR$

étape 1 :Chercher les points critiques de f : solutions de $\partial f / \partial x_i = 0, \forall i$

étape 2 : Pour ces points critique calculer la matrice Hessienne

$$H=(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$$ (matrices symétrique)

Déterminer sp(H)

étape 3 : Si $sp(H) \neq \{0\}$

1er cas : si $sp(H) \subset [0, \infty[$, alors le point critique en question est un minimum local

2ème cas : si $sp(H) \subset]-\infty, 0]$, alors le point critique en question est un maximum local

3ème cas : sinon, alors le point critique en question n'est ni maximum local ni minimum local

N.B : Si $sp(H) = \{0\}$, on peut rien dire

Must Concours n=2 : Théorème de Monge

Si $f : IR^2 \rightarrow IR$ est de classe C^2 en $(a,b) \in IR^2$

étape 1 : on cherche (a,b) les points critique de f :

$$\partial f/\partial x(a,b)=0 \text{ et } \partial f/\partial y\,(a,b)=0$$

étape 2 : On pose $r=\partial^2 f/\partial x^2\,(a,b)$, $s=\partial^2 f/\partial y^2\,(a,b)$ et $t=\partial^2 f/\partial x\,\partial y\,(a,b)$

- si $rt-s^2 > 0$ et $r>0$, alors f admet en (a,b) un minimum local
- si $rt-s^2 > 0$ et $r<0$, alors f admet en (a,b) un maximum local
- si $rt-s^2 < 0$, f n'admet en (a,b) ni minimum ni maximum local
- si $rt-s^2 =0$, on ne peut rien dire

Demo

$sp (H) =\{\lambda_1, \lambda_2\}$, $det(H)=\lambda_1 . \lambda_2$

$det(H) > 0 \Rightarrow \lambda_1 . \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ de même signe

Dans ce $Tr (H)= \lambda_1 + \lambda_2$ de même signe que λ_1, λ_2

Conclusion : $det(H) > 0$ et $Tr (H)>0 \Rightarrow \lambda_1 >0$ et $\lambda_2 > 0 \Rightarrow$ minimum local

La matrice Hessienne est $(Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x^2\,(a,b) & \partial^2 f/\partial x\,\partial y\,(a,b) \\ \partial^2 f/\partial x\,\partial y\,(a,b) & \partial^2 f/\partial y^2\,(a,b) \end{bmatrix}$

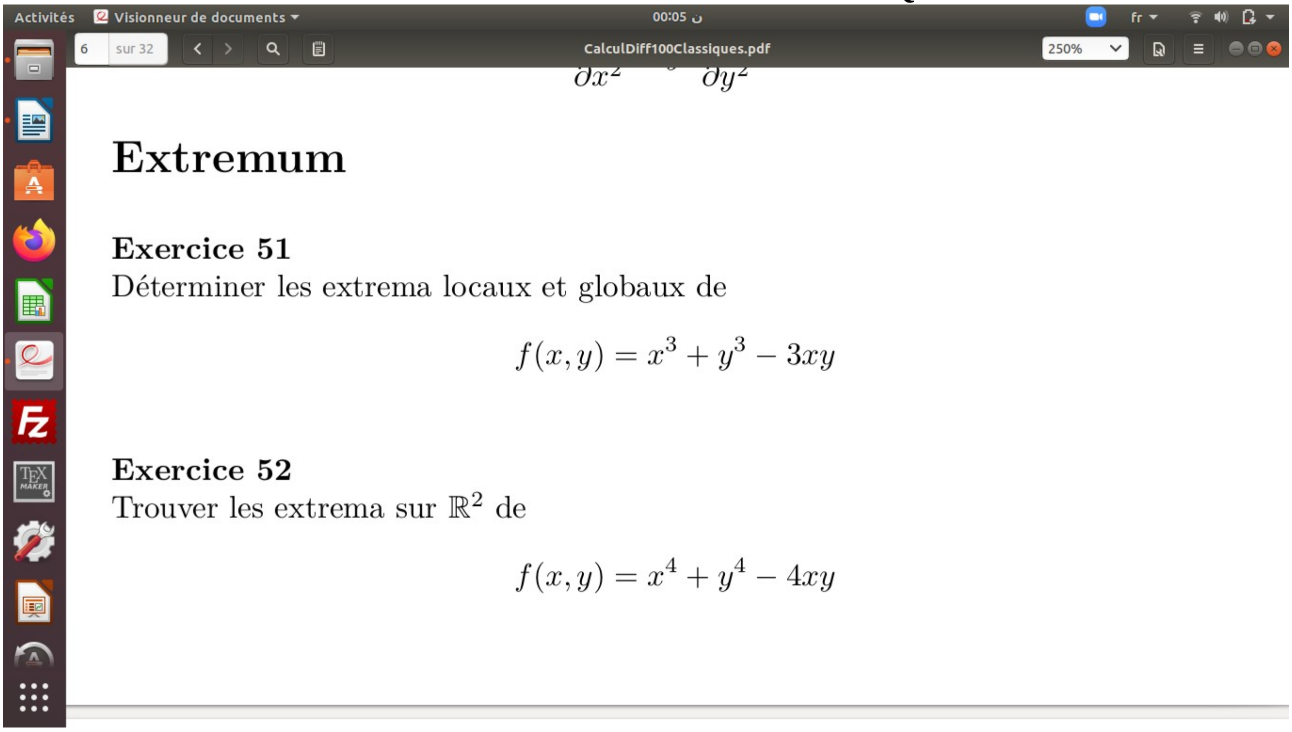
Donc $(Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$

Posons $sp (Hf)_{(a,b)} =\{\lambda_1, \lambda_2\}$

Donc $\lambda_1 . \lambda_2 =det (Hf)_{(a,b)} =rt-s^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 =Tr (Hf)_{(a,b)} =r+t$

- $rt-s^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 . \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ de même signe
- $rt-s^2 > 0 \Rightarrow$ r et t de même signe car sinon $rt<0$ et $rt-s^2 <0$

- $r>0 \Rightarrow t>0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ CQFD



Extremum

Exercice 51

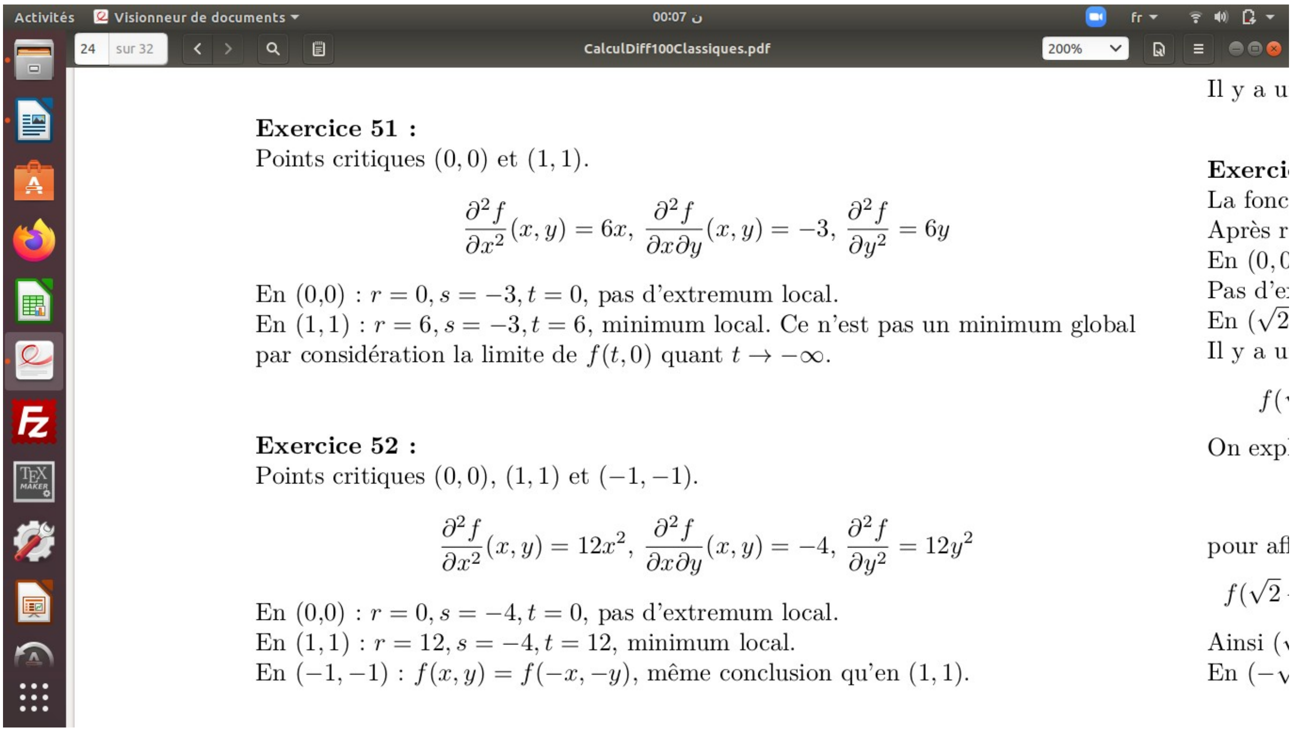
Déterminer les extrema locaux et globaux de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Exercice 52

Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$



Exercice 51 :

Points critiques $(0,0)$ et $(1,1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

En (0,0) : $r = 0, s = -3, t = 0$, pas d'extremum local.
En $(1,1)$: $r = 6, s = -3, t = 6$, minimum local. Ce n'est pas un minimum global par considération la limite de $f(t,0)$ quant $t \to -\infty$.

Exercice 52 :

Points critiques $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

En (0,0) : $r = 0, s = -4, t = 0$, pas d'extremum local.
En $(1,1)$: $r = 12, s = -4, t = 12$, minimum local.
En $(-1,-1)$: $f(x,y) = f(-x,-y)$, même conclusion qu'en $(1,1)$.