My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Math PrEPaS

Calcul Différentiel

Le Cours
Les Astuces & Les Classiques
Les Annales

Nature : Profil Centrales
Difficulté : *****
Importance : **

Objectifs

- Maîtriser la notion de différentielle et ses applications
- Savoir résoudre les EDP (équations aux dérives partielles)
- Savoir étudier les extremums de fonctions à deux variable

CNC	CCP	Mines	Centrales
2017, Math 1 **(Must To do)** 2009, Math 1 **(Must To do)**	2017, Math 1		2018, Math 2 2015, Math 1 2015, Math 2

1. Notion de différentielle

Définition
Soient E, F deux evn et $f : E \to F$ et $a \in E$
On dit que f est différentiable au point a <=> $\exists\, u_a : E \to F$ linéaire continue tel que

$$f(a+h)-f(a)=u_a(h) + o(\|h\|)\ ,\ \forall h \in E$$

Notation
Dans ce cas $u_a(h)$ s'appelle la différentielle de f en a appliquée au point et se note $df_a(h)$.
Ainsi, quand f est différentiable au point a, on écrit

$$f(a+h)-f(a)=df_a(h) + o(\|h\|)\ ,\ \forall h \in E$$

Exemple Préparation Concours Lycée Fermat

1) Mq sur $\mathbb{R}$: Td Fermet

$$\left|\arctan(t+h)-\arctan t-\frac{h}{1+t^2}\right| \leq \frac{h^2}{2}$$

2) $\varphi(f)=\int_0^1 \arctan(f(x))\,dx$

$f \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Mq φ diff

avec $d\varphi_f(h)=\int_0^1 \frac{h(x)}{1+f(x)^2}\,dx$

1) $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(c)$

$$\left|\arctan(t+h)-\arctan t-\frac{h}{1+t^2}\right|$$

$$\leq \frac{h^2}{2}\times\frac{2t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{h^2}{2}\times\frac{1}{1+t^2}$$

$2t \leq 1+t^2$

1) Mq sur $\mathbb{R}$: Td Fermet

$$\left|\arctan(t+h) - \arctan t - \frac{h}{1+t^2}\right| \leq \frac{h^2}{2}$$

2) $\Phi(f) = \int_0^1 \arctan(f(x))\,dx$

$f \in E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Mq Φ diff

avec $d\Phi_f(h) = \int_0^1 \frac{h(x)}{1+f(x)^2}\,dx$

2) $|\Phi(f+h) - \Phi(f) - d\Phi_f(h)|$

$\leq \int_0^1 \left|\arctan(f+h)(x) - \arctan f - \frac{h(x)}{1+f^2}\right| dx$

$= \int_0^1 \frac{h^2(x)}{2}(x)\,dx$

$\leq \boxed{\|h\|_\infty^2} = o(\|h\|)$

Théorème 1

f : IR $\rightarrow$ F et a $\in$ IR

Alors f est différentiable au point a <=> f est dérivable en a

Dans ce cas

$$df_a(h) = h.f'(a)$$
$$f'(a) = df_a(1)$$

Demo

=> Si f est différentiable au point a , alors $f(a+h)-f(a)=df_a(h) + o(|h|)$

Donc $[f(a+h)-f(a)] / h = df_a(h)/ h + o(|h|) / h = df_a(1) + o(1) \rightarrow df_a(1)$

Ainsi f est dérivable en a, avec $f'(a)=df_a(1)$

<= Si f est dérivable au point a , alors $[f(a+h)-f(a)]/ h \rightarrow f'(a)$

$[f(a+h)-f(a)]/ h - f'(a) \rightarrow 0$, donc $[f(a+h)-f(a)]/ h - f'(a) = o(1)$

$f(a+h)-f(a) - hf'(a) = o(h)$, cad $f(a+h)-f(a) = hf'(a) + o(h)$

Donc f est différentiable au point a avec $df_a(h) = hf'(a)$

Théorème 2
$f : IR \to F$ et $a \in IR$
f est différentiable au point a => f est continue en a

Demo
f est différentiable au point a => $f(a+h)-f(a)=df_a(h) + o(\|h\|)$, $\forall h \in E$
=> $\lim_{h \to 0} f(a+h)-f(a) = df_a(0) + o(0)=0$

Remarque
La réciproque du théorème n'est pas vrai
Prendre une fonction continue non dérivable

Théorème 3
Toute application linéaire continue $f : E \to F$ est différentiable en tout point $a \in E$
Avec

$$df_a(h) = f(h)$$

Demo
$f(a+h)-f(a)=f(h)+0$

Exemple
$u : A \to {}^tA$ est linéaire en dimension finie donc continue, donc différentiable, avec $du_A(B)= {}^tB$

Rappel
Une application bilinéaire $\varphi : E \times F \to G$ est continue <=> $\exists M>0$ tq

$$\| \varphi(x,y)\| \leq M. \|x\|. \|y\|, \quad \forall (x,y)\in ExF$$

Théorème 4 : Formule de Leibniz
Toute application bilinéaire continue $\varphi : E \times F \to G$ est différentiable en tout point $(a,b) \in ExF$
Avec

$$d\varphi_{(a,b)}(h,k) = \varphi(h,b) + \varphi(a,k)$$

Demo
$\varphi[(a,b)+(h,k)] - \varphi(a,b) = \varphi(a+h,b+k) - \varphi(a,b) = \varphi(a+h,b)+\varphi(a+h,k) - \varphi(a,b)$
$= \varphi(a,b)+\varphi(h,b)+\varphi(a,k)+\varphi(h,k) - \varphi(a,b)$
Ainsi
$\varphi[(a,b)+(h,k)] - \varphi(a,b) = \varphi(h,b)+\varphi(a,k)+\varphi(h,k)$
Or $\| \varphi(h,k)\| \leq M. \|h\|. \|k\| \leq M. \|(h,k)\|. \|(h,k)\|$

Classiques Concours

- Si $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$, alors $d\varphi_{(a,b)}(h,k) = \langle h,b\rangle + \langle a,k\rangle$
- Si $\varphi(x,y)=x.y$, alors $d\varphi_{(a,b)}(h,k) = h.b + a.k$

Théorème 5

Si $f,g : E \to F$ différentiables en $a \in E$

Alors $f+g : E \to F$ différentiable en $a \in E$

Avec

$$d(f+g)_a(h)=df_a(h)+dg_a(h)$$

Demo : Facile à faire

Théorème 6

Si $f : E \to F$ différentiables en $a \in E$

Si $g : F \to G$ différentiables en $b=f(a) \in F$

Alors $gof : E \to G$ différentiable en $a \in E$

Avec

$$d(gof)_a(h)=dg_{f(a)} \circ df_a(h)$$

Demo

On sait que $g(f(a)+k)-g(f(a))=dg_{f(a)}(k)+o(\|k\|)$

donc $g(f(a)+k)-g(f(a))=dg_{f(a)}(k)+o(\|k\|)$

De même $f(a+h)=f(a)+df_a(h)+o(\|h\|)$. Donc

$gof(a+h)-gof(a) =g(f(a+h)) -g(f(a))=g[f(a)+df_a(h)+o(\|h\|)] -g(f(a))$

$=dg_{f(a)}(df_a(h)+o(\|h\|))+o(\|k\|) =dg_{f(a)}(df_a(h))+dg_{f(a)}(o(\|h\|))+o(\|k\|)$

$=dg_{f(a)}(df_a(h))+o(\|h\|)+o(\|k\|)$

Rappel

Une application linéaire $u : E \to F$ est continue $\Leftrightarrow \exists M>0$ tq

$$\|u(x)\| \leq M.\|x\|, \quad \forall x \in E$$

Dans ce cas $u(o(h))=o(h)$, car $\|u(o(h))\| \leq M.\|o(h)\|$

Théorème 7. (Fondamentale)

Si $f : E \to IR$ différentiables en $a \in E$

Si $g : IR \to G$ dérivable en $b=f(a) \in F$

Alors $gof : E \to G$ différentiable en $a \in E$

Avec

$$d(gof)_a(h)=df_a(h).g'(f(a))$$

Demo

Comme $g : IR \to G$ dérivable en b on sait que $dg_b(h) =h.g'(b)$,

Donc $d(gof)_a(h)=dg_{f(a)} \circ df_a(h) = dg_{f(a)}(df_a(h))=df_a(h).g'(b)$

Classique préhilbertiens

1. $A(x)=||x||^2=<x,x>$ est différentiable avec $dA_a(h)=2<a,h>$
2. $B(x)=||x||$ est différentiable avec $dB_a(h)=<a,h> / ||a||$

Demo

1. $f(x,y)=<x,y>$ est bilinéaire, donc $df_{(a,b)}(x,y)=<a,y>+<x,b>$
   $g(x)=(x,x)$ est linéaire, donc $dg_x(h)=g(h)=(h,h)$
   $A(x)=fog(x)$ est différentiable, avec
   $dA_a(h)=d(fog)_a(h) =df_{g(a)} \text{ o } dg_a (h)=df_{g(a)} (dg_a (h))=df_{(a,a)} (h,h)=2<a,h>$
2. posons $\varphi : IR \rightarrow IR$ tq $\varphi(t)=t^{1/2}$ est dérivable avec $\varphi'(t)=1/2.\ t^{-1/2}$
   Donc $B(x)=A(x)^{1/2} = \varphi oA(x)$, Ainsi B est différentiable avec .
   $dB_a(h)=d(\varphi oA)_a(h)=dA_a(h).\varphi'(A(a))=2<a,h>1/2.\ A(a)^{-1/2} =<a,h> / ||a||$

2. Dérivée partielles

Définition
Soient F un evn et $f : IR^n \to F$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in E$
On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en a <=> l'application partielle $f_i(t) : IR \to E$ définie par $f_i(t)=f(a_1, \quad t, \quad a_n)$ est dérivable en $t=a_i$
Sa dérivée se note $\partial f / \partial x_i (a)$

Théorème 1 (fondamental)
Soient F un evn et $f : IR^n \to F$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in E$
Si f différentiable en a, alors f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en a, avec

$$\partial f / \partial x_i (a) = df_a(e_i)$$

où $e_i=(0, \ldots, 1, \quad 0)$ $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de IR^n

Demo
$f(a+he_i)-f(a)=f(a_1, .. a_i+h, a_n) -f(a_1, \ldots a_i ..., a_n)$
Or $f_i(t)=f(a_1, \quad t, \quad a_n)$, donc $f_i(ai+h)-f_i(ai)=f(a+he_i)-f(a)$
Or f est différentiable, donc $f(a+he_i)-f(a)=dfa(he_i)+o(h)$
$[f_i(a_i+h)-f_i(ai)] / h = df_a(e_i)+o(1) \to df_a(e_i)$

Remarque
La réciproque du thm précédent n'est pas toujours vrai
f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en a **n'implique pas** que f différentiable en a, alors

Théorème 2 fondamental
Soient F un evn et $f : IR^n \to F$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en au voisinage de
Si ses drivées partielle sont continue en a
Alors f différentiable en a,

$$df_a(h)= \sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i (a)h_i \quad \forall h=(h_1, \ldots, h_n)\in IR^n$$

Demo : Admise

Vocabulaire

Quand f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en au voisinage de
Si ses drivées partielle sont continue en a
On dit alors que f est de classe C^1 en a

Théorème 3 : vecteur gradient

f : $IR^n \rightarrow IR$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
f est de classe C^1 en a
Alors

- $\partial f/\partial x_i \in IR$, on pose grad $f(a)=\sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i (a)e_i$ (vecteur gradient)
- $df_a(h)= \sum_{i=1}^{n} \partial f/\partial x_i (a)h_i = \langle \text{grad } f(a), h \rangle \forall h=(h_1, \ldots, h_n)\in IR^n$

Exemple

$f(x,y)=2xy^2+ \cos(xy)$ de IR^2 vers IR
$\partial f/\partial x(x,y) = 2y^2 -y. \sin(xy)$
$\partial f/\partial y(x,y) = 4xy -x. \sin(xy)$
grad $f(x,y) =(2y^2 -y. \sin(xy), 4xy -x. \sin(xy))$
$df_{(x,y)}(a,b) = \langle \text{grad } f(x,y) \mid (a,b) \rangle = a.(2y^2 -y. \sin(xy)) + b.(4xy -x. \sin(xy))$

Théorème 4 : Matrice Jacobienne

$f : IR^n \to IR^m$ définie par $f(x)=(f_1(x), \dots, f_m(x))$ et $a=(a_1, \dots, a_n) \in IR^n$

$f_i : IR^n \to IR$

Si f est de classe C^1 en a

Alors

- $\partial f/\partial x_i \in IR^m \quad 1 \leq i \leq m$
- $\partial f_i/\partial x_j \in IR \quad 1 \leq j \leq n$
- $Jf(a) = (\partial f_i/\partial x_j\,(a)) \in M_{m,n}\,(IR)$ (Matrice Jacobienne)
- $df_a(h) = Jf(a).{}^th \quad \forall h=(h_1, \dots, h_n) \in IR^n$

$$Jf_a = \begin{array}{cc} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_i}{\partial} & \left(\; \longrightarrow \; \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \;\right) \end{array}$$

Demo

$f(x)=(f_1(x), \dots, f_m(x)) \Rightarrow df_a(h)=(df_{1a}(h), \dots, df_{ma}(h))$

Or $f_i : IR^n \to IR$, donc $df_{ia}(h) = \sum_{j=1}^{n} \partial f_i/\partial x_j\,(a)h_j$

Donc $df_a(h) = (\sum_{j=1}^{n} \partial f_1/\partial x_j\,(a)h_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \partial f_m/\partial x_j\,(a)h_j) = Jf(a).{}^th$

Classique Concours : coordonnées polaires

$f : IR^2 \to IR^2$ tq $f(r,\theta) = (x=r.\cos\theta,\ y=r.\sin\theta)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \frac{\partial \cdot}{\partial r} & \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \end{array} \\ \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \cdot} \\[2ex] \frac{\partial y}{\partial \cdot} \end{array} & \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta \end{pmatrix} \end{array} = Jf$$

3. Équations aux Dérivée partielles (EDP)

Théorème 1 : Fondamental
Si γ : IR $\rightarrow$ E et f : E $\rightarrow$ F de classes C^1
Alors f o γ : IR $\rightarrow$ F est aussi de classes C^1
Avec

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Demo
Selon ce qui précède, on a
$(f \circ \gamma)'(t) = d(f \circ \gamma)_t(1) = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t(1) = df_{\gamma(t)}(d\gamma_t(1)) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$

Théorème 2 : Cas particulier classique
Si γ : IR $\rightarrow$ IR^n tq $\gamma(t)=(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ et f : $IR^n \rightarrow$ F de classe C^1
Alors f o γ : IR $\rightarrow$ F est aussi de classe C^1
Avec

$$(f \circ \gamma)'(t) = \Sigma_{i=1}^{n} \; u_i'(t) \partial f/\partial xi\,(\gamma(t))$$

Demo
Selon ce qui précède, on a, posons $h=\gamma'(t)=(u_1'(t), \ldots, u_n'(t))$
$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(h) = \Sigma_{i=1}^{n} h_i \partial f/\partial xi\,(\gamma(t)) = \Sigma_{i=1}^{n} \; u_i'(t)\partial f/\partial xi\,(\gamma(t))$ car $h_i=u_i'(t)$

Théorème 3 : Règle des chaînes
Si f : IR^n $\rightarrow$ IR tq $f(x_1, \ldots, x_n)$ de classe C^1
Si φ : IR^n $\rightarrow$ IR^n tq $\varphi(u_1, \ldots, u_n)=(x_1, \ldots, x_n)$ de classe C^1
On pose $g(u_1, \ldots, u_n)=f(x_1, \ldots, x_n)$: Changement de variable
Autrement dit : $g=f \circ \varphi$
Alors g : IR^n $\rightarrow$ IR est aussi de classe C^1
Avec

$$\partial g/\partial u_j = \Sigma_{i=1}^{n} \; (\partial x_i/\partial u_j)\,(\partial f/\partial x_i)$$

Demo

$\partial g/\partial u_j$= dérivée de g par rapport à la $j^{ème}$ variable

Notons $t=u_j$ et les autres variables fixes cette variable et $\varphi=\gamma=(x_1, \ldots, x_n)$

$\partial g/\partial u_j = g'(t)=(f \circ \varphi)'(t)=\Sigma_{i=1}^{n}\ x_i'(t)\partial f/\partial x_i\,(\gamma(t))$ avec $x_i'(t)=\partial x_i/\partial u_j$

x et y deux VAR

u, v deux var

on $f(x,y)=g(u,v)$

1er cas x, y dépendent de u, v

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

2ème cas : u et v dépendent de x, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

Classique Concours : CNC 2007

Résoudre l'EDP $x.\partial f/\partial x - y.\partial f/\partial y=0$

en utilisant le changement de variable $x=r.\cos\theta$ et $y=r.\sin\theta$

Solution

Posons $f(x,y)=g(r, \theta)$

Selon la règle des chaînes, on a

$\partial g/\partial r=(\partial x/\partial r).(\partial f/\partial x) + (\partial y/\partial r).(\partial f/\partial y) = \cos\theta.(\partial f/\partial x) + \sin\theta.(\partial f/\partial y)$

$\partial g/\partial\theta=(\partial x/\partial\theta).(\partial f/\partial x) + (\partial y/\partial\theta).(\partial f/\partial y) = -r.\sin\theta.(\partial f/\partial x) + r.\cos\theta.(\partial f/\partial y)$

$r.\sin\theta\ .\ (1) + \cos\theta\ .\ (2) \Rightarrow r.\ (\partial f/\partial y) = r.\sin\theta.\ \partial g/\partial r + \cos\theta.\ \partial g/\partial\theta$

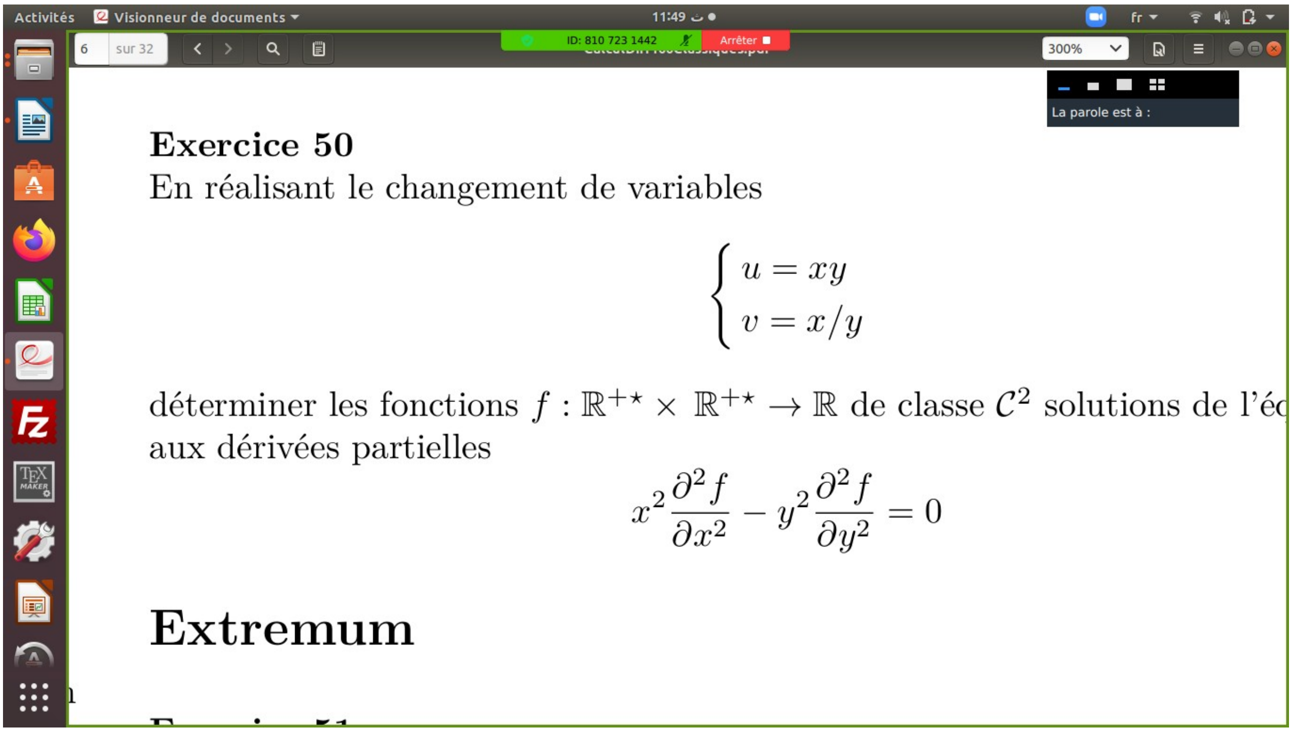
$r.\cos\theta\ .\ (1) - \sin\theta\ .\ (2) \Rightarrow r.\ (\partial f/\partial x) = r.\cos\theta.\ \partial g/\partial r - \sin\theta.\ \partial g/\partial\theta$

$x.\partial f/\partial x = \cos\theta.\ r.\partial f/\partial x = r.\cos .\sin\theta.\ \partial g/\partial r + \cos\theta^2.\ \partial g/\partial\theta$

$y.\partial f/\partial y = \sin\theta.\ r.\partial f/\partial y = r.\cos\theta.\ \sin\theta.\ \partial g/\partial r - \sin\theta^2.\ \partial g/\partial\theta$

$x.\partial f/\partial x - y.\partial f/\partial y=0 \Rightarrow \partial g/\partial\theta=0 \Rightarrow$ g ne dépend pas de $\theta \Rightarrow g(r, \theta)=\varphi(r)$

Donc $f(x,y)=g(r, \theta)=\varphi(r)=\varphi\ [(x^2+y^2)^{1/2}]$



Exercice 50
En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x/y \end{cases}$$

déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'é
aux dérivées partielles

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Extremum

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \underbrace{\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}}}_{A} + \frac{1}{y} \underbrace{\boxed{\frac{\partial g}{\partial v}}}_{B}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \frac{\partial}{\partial x}(A) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x}(B)$$

$$= y\left(y \frac{\partial A}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{1}{y}\left(y \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{1}{y} \frac{\partial B}{\partial v}\right)$$

$$= y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

3. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 1
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_i puis x_j en a <=> $\partial f/\partial x_i$ existe au voisinage de a et $\partial[\partial f/\partial x_i] / \partial x_j (a)$ existe
Cette dérivée se note $(\partial^2 f)/(\partial x_i x_j)(a)$

Définition 2
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
On dit que f est de classe C^2 en a <=> f admet des dérivée partielle d'ordre 2 au voisinage de a et sont toutes continues en a

Théorème 1 : Théorème de Schwarz
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Si f est de classe C^2 en a , alors

$$(\partial^2 f)/(\partial x_i \partial x_j)(a)=(\partial^2 f)/(\partial x_j \partial x_i)(a)$$

Demo : Admis

Définition 3 : Matrice Hessienne
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Si f est de classe C^2 en a, on pose

$$(Hf)_a =[(\partial^2 f)/(\partial x_i \partial x_j)(a)] \in M_n(IR)$$

Théorème 2 :
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Si f est de classe C^2 en a , alors $(Hf)_a$ est une matrice symétrique

Demo : Découle du théorème de Schwarz

Théorème 3 : Formule de Taylor à l'ordre 2
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Si f est de classe C^2 en a. Alors, $\forall h \in IR^n$, on a

$$f(a+h)=f(a)+(Jf)_a \,.\, h + 1/2 \,.\, {}^t h. \,(Hf)_a \,.\, h + o(||h||^2)$$

Demo : Admise $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+1/2.h^2.\, f''(a) + o(h^2)$

Théorème 4 : Développement limité à l'ordre 2 au voisinage de a
Soient E un evn et f : $IR^n \rightarrow E$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Si f est de classe C^2 en a. Alors, $\forall h=(h_1, \ldots, h_n) \in IR^n$, on a

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^{n} \partial f_i/\partial x_j\,(a)h_j + \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2 f_i/\partial x_i x_j\,(a)h_i h_j + o(||h||^2)$$

Demo : Développer $(Jf)_a \,.\, h$ et ${}^t h. \,(Hf)_a \,.\, h$

4. Extremums

Définition 1
Soient $f : IR^n \to IR$ et $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
On dit que f admet un minimum local en a<=>$\exists \varepsilon>0$ / $f(a) \leq f(x), \forall x \in B(a, \varepsilon)$
On dit que f admet un maximum local en a<=>$\exists \varepsilon>0$ / $f(a) \geq f(x), \forall x \in B(a, \varepsilon)$
On dit que f admet un extremum local en a<=> f admet en a un minimum ou maximum local

Définition 2
Soient $f : IR^n \to IR$ de classe C^1 en $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
On dit que f admet un point critique en a<=> $df_a(h)=0, \forall h \in IR^n$
<=> $\partial f_i / \partial x_j (a)=0, \forall i,j$

Théorème 1
Si $f : IR^n \to IR$ est de classe C^1 en $a=(a_1, \ldots, a_n) \in IR^n$
Alors f admet un extremum local en a => f admet point critique en a

Demo
si $\varphi : IR \to IR$ dérivable en t et admet en t un min ou max local, alors

$$\varphi'(t)=0$$

Utiliser ce résultat pour $\varphi(t)=f_i(t)$ où $t=u_i$ et les autres variables fixes

Remarque
La réciproque du théorème précédent n'est pas toujours vrai
Autrement dit : f admet point critique en a n'implique pas que f admet un extremum local en a

Contrer exemple
$f(t)=t^3$ admet un point critique en 0, mais f n'admet un extremum local en 0, car f(0)=0 et f change de signe en 0

Théorème 2 : Pratique
Si $f : IR^n \to IR$ est de classe C^2 en $a=(a_1, \dots, a_n) \in IR^n$
Si f admet un point critique en a
Si $sp((Hf)_a) \subset]0,+\infty[$
Alors f admet un minimum local en a

Demo
D'aprés le théorème de Schwarz $(Hf)_a$ est une matrice symétrique réelle
Donc $(Hf)_a$ est orthogonalement diagonalisable, d'après le thm spectral
Posons $(Hf)_a = PDP^{-1} = PD{}^tP$ où $D=diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$
D'autre par $(Jf)(a)=0$, car f admet un point critique en a
la formule Taylor à l'ordre 2 devient
$f(a+h)-f(a)=(Jf)_a . h + {}^th. (Hf)_a . h + o(||h||^2) = {}^th. PD{}^tP . h + o(||h||^2)$
Comme $o(||h||^2)$ n'influence pas le signe, alors
$signe(f(a+h)-f(a)) = signe({}^th. PD{}^tP . h) = signe({}^tXDX)>0$ où $X={}^tP . H$
donc $f(a+h)-f(a)>0$ cad $f(a+h)>f(a)$
Donc f admet un minimum local en a

Rappel : ${}^tXDX=\sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i^2$

Théorème 3 : Pratique
Si $f : IR^n \to IR$ est de classe C^2 en $a=(a_1, \dots, a_n) \in IR^n$
Si f admet un point critique en a
Si $sp((Hf)_a) \subset]-\infty,0[$
Alors f admet un maximum local en a

Demo
Pareil que le thm précédent

Remarque
Si f admet un point critique en a et si $(Hf)_a$ admet des valeurs propre négatives et d'autres positives, alors on ne peut rien dire à propos de la nature du point a

Théorème 3 : Théorème de Monge
Si $f : IR^2 \rightarrow IR$ est de classe C^2 en $(a,b) \in IR^2$
Si f admet un point critique en (a,b)
On pose $r=\partial^2 f/\partial x^2 (a,b)$, $s=\partial^2 f/\partial y^2 (a,b)$ et $t=\partial^2 f/\partial x \partial y (a,b)$

- si $rt-s^2 > 0$ et $r>0$, alors f admet en (a,b) un minimum local
- si $rt-s^2 > 0$ et $r<0$, alors f admet en (a,b) un maximum local
- si $rt-s^2 < 0$, f n'admet en (a,b) ni minimum ni maximum local
- si $rt-s^2 =0$, on ne peut rien dire

Demo

La matrice Hessienne est $(Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 (a,b) & \partial^2 f/\partial x \partial y (a,b) \\ \partial^2 f/\partial x \partial y (a,b) & \partial^2 f/\partial x^2 (a,b) \end{bmatrix}$

Donc $(Hf)_{(a,b)} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$

Posons sp $(Hf)_{(a,b)} =\{\lambda_1, \lambda_2\}$
Donc $\lambda_1 . \lambda_2 = \det (Hf)_{(a,b)} = rt-s^2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = Tr (Hf)_{(a,b)} = r+t$

- $rt-s^2 > 0 \Rightarrow \lambda_1 . \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ de même signe
- $rt-s^2 > 0 \Rightarrow$ r et t de même signe car sinon $rt<0$ et $rt-s^2 <0$
- $r>0 \Rightarrow t>0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 >0 \Rightarrow \lambda_1 >0$ et $\lambda_2 >0$ CQFD