Dérivés Partielles

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to E$ (Banach), $a = (a_1, \dots, a_n) \in U, h \in \mathbb{R}^n$

Dérivées partielles: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi'(a_i)$ où $\varphi(t) = f(a_1 \dots, a_i \dots a_n)$

Dérivée de f en a suivant h:

$$D_h f(a) = \lim_0 \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = (\varphi_h)'(0) \text{ où } \varphi_h : \begin{array}{ccc} [-\varepsilon, \varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f(a+th) \end{array}$$

Thm: $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = D_{e_i} f(a)$, où (e_i) base canonique de $\mathbb{R}^n$

Def: f de classe $\mathcal{C}^1$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continue

Thm: f de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow D_h(f)(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

Gradient: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on pose

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i, \text{ on a alors}$$

$$D_h(f)(a) = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a), h \right\rangle$$

Matrice Jacobienne:

Si $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1, \dots, f_m) \end{array}$

de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $\mathcal{J}f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

on a alors $D_h(f)(a) = \mathcal{J}f(a) \times h$

Dérivées d'ordre supérieures:

Def: f de classe $\mathcal{C}^2$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de classe $\mathcal{C}^1$ $\forall i$

dans ce cas, on a:

Thm Schwarz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{1 \le i,j \le n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o\left(\|h\|_2^2 \right)$$

Différentielle

Def: $f : E \to F$ où E, F Banach.

On dit que f est différentiable en a ssi $\exists df_a$ lin. tq $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$, $\forall h \in E$

Propriétes: $d(f + \lambda g)_a = df_a + \lambda dg_a$

$d(fg)_a = df_a . g(a) + f(a). dg_a$

$d(f \circ g)_a = df_{g(a)} \circ dg_a$

$f(\gamma(t))' = d_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$

$D_h f(a) = df_a(h)$

$\mathcal{J}f(a) = \mathcal{M}(df_a)$ qd $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$

$df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ qd. $E = \mathbb{R}^n$

$df_a(h) = \left\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a), h \right\rangle$ qd. $F = \mathbb{R}$

Dérivation vectorielle: $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ (Banach)

Def: $f'(t_0) = \lim_{t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

Thm: f de classe $\mathcal{C}^1 \Rightarrow D_h f(a) = f'(a).h$

Thm: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $t \mapsto x_i(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)' = \sum x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

App linéaire cont.

Si $f : E \to F$ linéaire cont, alors $d_a f = f$, $\forall a$.

App bilinéaire cont.

Si $f : E \times F \to G$ bilinéaire cont, alors

$d_{(a,b)} f(u, v) = f(a, v) + f(u, b)$, $\forall a$.

Thèmes classiques: Résolution d'EDP, Extremum, Laplacien, Eq. Chaleur, Fcts harmoniques

Thèorèmes Généraux

Extremums: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

Thm: f admet un extr. en $a \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $\forall i$

Formules de Monge: $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$

$(a, b) \in U$ tq. $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$

$rt - s^2 > 0, \ r > 0 \Rightarrow$ min. local

$rt - s^2 > 0, \ r < 0 \Rightarrow$ max. local

$rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ n'est pas extremum

$rt - s^2 = 0 \Rightarrow$?

Formules de chgt. var.: $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

$(u, v) = \varphi(x, y), \ g(u, v) = f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.

Def: f bij. + f et f^{-1} de classe $\mathcal{C}^k$

Thm inversion locale:

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ classe $\mathcal{C}^k$ + det $\mathcal{J}f(a) \neq 0$ +U ouvert $\Rightarrow f$ $\mathcal{C}^k$-diffeo au vois de a

Thm inversion globale: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ bij+ class $\mathcal{C}^k$ alors f $\mathcal{C}^k$-diffeo $\Leftrightarrow$ det $\mathcal{J}f(a) \neq 0$ $\forall a \in U$

Thm Fcts Implicites: $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ class. $\mathcal{C}^k$

Si $f(a, b) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ alors $\exists \varphi :]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ class. $\mathcal{C}^k$ tq $\varphi(a) = b, \ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$