My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُّونِي مُولَاي اسْمَاعِيل

Résumé de cours: *Calcul différentiel*

Blague du jour

Pendant une conférence de presse tenue à la Maison Blanche, le président George W.Bush accuse les mathématiciens et les informaticiens des États- Unis de promouvoir le programme démocratique.

«Tous les départements de mathématiques, ou du moins d'informatique proposent une introduction aux AlGore-ithmes, déplore-t-il. Mais pas un seul enseigne les GeorgeBush-ithmes...»

Mathématicen du jour *Schwarz.*

Hermann Amandus Schwarz, (1843-1921) est un mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.

Il a travaillé sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations.

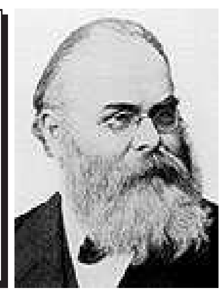

Table des matières

1 Différentielle d'une application

1.1 Dérivation vectorielle.

Définition 1 .
Soit $f : I \longrightarrow E$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace de Banach. Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable au point t_0 si et seulement si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ existe dans E, qu'on note par $f'(t_0)$ et qu'on appelle dérivée de f au point t_0.

Proposition 1 .
Une application $f : \begin{array}{ccc} I \subset R & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (f_1(t), \cdots, f_p(t)) \end{array}$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si toutes ses applications composantes $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en t_0, dans ce cas $f'(t_0)) = (f_1'(t), \cdots, f_p'(t))$.

Remarque 1 .
- **Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.**
- **L'application vectorielle $\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \end{array}$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si les applications coordonnées $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables au point t_0, dans ce cas : $\overrightarrow{V}(t_0) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{x}(t_0)\overrightarrow{i} + \dot{y}(t_0)\overrightarrow{j}$.**

Définition 2 . Soit $f : I \subset R \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N}^*$
- **Par récurrence on définit la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f au point $t_0 \in I$ de la façon suivante : f est k-fois dérivables au point t_0 si et seulement si f est $(k-1)$-fois dérivable au point t_0 et $f^{(k-1)}$ dérivable au point t_0, dans ce cas on pose**
$$f^{(k)}(t_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(t_0)$$
- **On dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est k-fois dérivable sur I, avec $f^{(k)}$ continue sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^k(I, E)$.**
- **On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle indéfiniment dérivable sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$.**

Proposition 2 . Soient $f, g : I \subset R \longrightarrow E$ $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
- **Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $f + \lambda g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. En particulier, $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**
- **Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors $f + \lambda g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. En particulier, $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .**

Théorème 1 . *Formule de Leibniz générale.*
Soient $f, g : I \subset R \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $B : E \times E \longrightarrow F$ (Banach) bilinéaire, alors l'application $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, avec
$$(B(f(t), g(t)))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B\left(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\right).$$

Théorème 2 . *Inégalité des accroissements finis.*
Soient $f : [a, b] \subset R \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $\|f'(t)\| \leq k$ sur $]a, b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k|b - a|$.

1.2 Notion d'application différentiable.

Définition 3 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ où U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linéaire $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que $f(a + \overrightarrow{h}) - f(a) = \ell(\overrightarrow{h}) + o(\|h\|)$, $\forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$.
L'application linéaire (qui est unique) $\ell(\overrightarrow{h})$ s'appelle la différentielle de f au point a appliquée au vecteur $\overrightarrow{h}$ et se note $df_a(\overrightarrow{h})$, ainsi on a :

$$f(a + \overrightarrow{h}) - f(a) = df_a(\overrightarrow{h}) + o(\|\overrightarrow{h}\|),\ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } a + \overrightarrow{h} \in U.$$

Remarque 2 .
- **La notion de différentiabilité sur $\mathbb{R}$ généralise celle de la dérivabilité, plus précisement si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in I$, alors f est différentiable au point a si et seulement si f est dérivable au point a avec $df_a(h) = h.f'(a)$, $\forall h \in \mathbb{R}$.**
- **Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.**
- **Soit une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, avec $df_a = f$.**

Proposition 3 .
Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a, alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$d(f + \lambda g)_a(\overrightarrow{h}) = df_a(\overrightarrow{h}) + \lambda dg_a(\overrightarrow{h}),\ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 4 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$d(g \circ f)_a(\overrightarrow{h}) = (dg)_{f(a)} \circ df_a(\overrightarrow{h}),\ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Matrice Jacobienne

Définition 4 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en un point $a \in U$, sa matrice Jacobienne au point a est la matrice notée $\mathcal{J}_a f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, définie par la relation :

$$\mathcal{J}_a f = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(df_a)$$

où $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont respectivement les bases cononiques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Proposition 5 .
Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a, alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(f + \lambda g) = \mathcal{J}_a f + \lambda \mathcal{J}_a g$$

Proposition 6 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(a)} g \cdot \mathcal{J}_a f$$

Remarque 3 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **différentiable en un point** $a \in U$**, alors** $\mathcal{J}_a f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**, dont le déterminant s'appelle le Jacobien de** f **au point** a**.**

2 Dérivées partielles.

2.1 Dérivée suivant un vecteur

Définition 5 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ **et** $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$**, alors** $\exists \varepsilon\, 0$ **tel que** $a + t\overrightarrow{h} \in U\ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$**.**
On dit alors que f **admet au point** a **une dérivée suivant le vecteur** $\overrightarrow{h}$ **si la fonction** $\begin{array}{rccc} \varphi_{\overrightarrow{h}} : & [-\varepsilon,\varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & f(a+t\overrightarrow{h}) \end{array}$ **est dérivable en 0, on pose alors**

$$D_{\overrightarrow{h}} f(a) = \left(\varphi_{\overrightarrow{h}}\right)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t}$$

qu'on appelle dérivée de f **au point** a **suivant le vecteur** $\overrightarrow{h}$**.**

Définition 6 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ **et** $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ **la base canonique de** $\mathbb{R}^n$**. On dit alors que** f **admet au point** a **une dérivée partielle par rapport à** x_i **si et seulement si** $D_{\overrightarrow{e_i}} f(a)$ **existe, dans ce cas on pose ;**

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = D_{\overrightarrow{e_i}} f(a)$$

Remarque 4 .
- **Soit** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **et** $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ **La dérivée partielle** $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ **s'obtient en dérivant la fonction** $t \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ **au point** a_i**, c'est à dire : on fixe** $n-1$ **variables et on dérive par rapport à l'autre variable.**
- **Si** $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **et continue en** a **et admet des dérivées partielles au** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ **au voisinage de** a**, alors le Théorème des Accroissements Finis (TAF) s'écrit**

$$f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a) = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha\overrightarrow{e_i}),\ \textbf{tel que } \alpha \in]0, t[.$$

Proposition 7 .
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est différentiable en un point** $a \in U$**, alors** f **admet en** a **une dérivée suivant tout vecteur** $h \in \mathbb{R}^n$**, avec**

$$df_a(\overrightarrow{h}) = D_{\overrightarrow{h}} f(a)$$

En particulier f **admet des dérivées partielles en** a**.**

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 7 .
Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est dite de classe** $\mathcal{C}^1$ **en un point** $a \in U$**, si** f **admet au voisinage de** a **une dérivée suivant tout vecteur** $h \in \mathbb{R}^n$, $D_{\overrightarrow{h}} f$**, continue en** a**.**
L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ **sur** U **se note** $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$**.**

Théorème 3 .
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **admet au voisinage de** $a \in U$ **des dérivées partielles** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ **toutes continues en** a**, alors** f **est de classe** $\mathcal{C}^1$**, avec**

$$D_{\overrightarrow{h}} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i,\ \forall \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$$

Théorème 4 .
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **en** a**, alors** f **est différentiable en** a **avec**

$$df_a(\overrightarrow{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i,\ \forall \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$$

Proposition 8 .
- **Si** $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** U **et** $\lambda \in \mathbb{R}$ **alors** $f + \lambda g$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** U**, avec**
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i},\ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$
Ainsi $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ **est muni d'une structure de** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel .**
- **La composée de deux applications de classe** $\mathcal{C}^1$ **est aussi de classe** $\mathcal{C}^1$**.**

Théorème 5 . ***Théorème de composition.***
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **et** $\gamma : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array}$ **un chemin inclu dans** U **dérivable, alors** $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est dérivable, avec**

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

Théorème 6 . ***Changement de variables.***
Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **et** $\varphi : \begin{array}{ccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$**, alors**

$$g(u,v) = f \circ \varphi(u,v) = f(x,y)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$**, avec**

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g}{\partial u} & = & \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & = & \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right.$$

Remarque 5 . ***Coordonnées polaires.***
Si on pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ **et** $g(r,\theta) = f(x,y)$**, alors :**

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial g}{\partial r} & = & \cos\theta & \dfrac{\partial f}{\partial x} & + & \sin\theta & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & = & -r\sin\theta & \dfrac{\partial f}{\partial x} & + & r\cos\theta & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right.$$

En résolvant ce système d'inconnues $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ **et** $ddfy$**, on obtient :**

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos\theta & \dfrac{\partial g}{\partial r} & - & \dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \sin\theta & \dfrac{\partial g}{\partial r} & + & \dfrac{\cos\theta}{r} & \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Théorème 7 . *Inégalité des accroissements finis.*
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **tel que** $\exists M \geq 0$ **vérifiant** $\|df_a(\overrightarrow{h})\| \leq k,\ \forall a \in U, \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ **tel que** $a + \overrightarrow{h} \in U$**, alors**

$$\|f(a+\overrightarrow{h}) - f(a)\| \leq k\|\overrightarrow{h}\|$$

Théorème 8 . *Inégalité des accroissements finis.*
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **où** U **ouvert connexe par arc, alors**

f **est constante si et seulement si** $df_a = 0,\ \forall a \in U$**.**

2.3 Gradient.

Définition 8 .
On rappelle d'abord que pour toute forme lineaire $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$**, il existe un unique vecteur** $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ **tel que** $\varphi(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{h}$**.**
En particulier, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **est différentiable en** $a \in U$**, alors** df_a **est une forme linéaire sur** $\mathbb{R}^n$**, pourlaquelle il existe un unique vecteur noté** $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a)$ **tel que :**

$$df_a(\overrightarrow{h}) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a).\overrightarrow{h}$$

$\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a)$ **s'appelle le gradient de** f **au point** a**.**

Remarque 6 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$**, pour tout** $a \in U$, $\overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i} \in \mathbb{R}^n$**, on a :** $df_a(\overrightarrow{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$**, ainsi on conclut que :**

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overrightarrow{e_i}$$

Proposition 9 .
Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$ **et** $\lambda \in \mathbb{R}$**, alors** $f + \lambda g$ **et** fg **sont de classe** $\mathcal{C}^1$**, avec**

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f+\lambda g)(a) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a) + \lambda\overrightarrow{\mathbf{grad}}g(a) \\ \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a) + f(a) \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}g(a) \end{cases}$$

Définition 9 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$**, on appelle point critique ou stationnaire de** f**, tout point** $a \in U$ **vérifiant** $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(a) = \overrightarrow{0}$**.**

3 Dérivées d'ordre supérieures.

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 10 .
On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ **est de classe** $\mathcal{C}^2$**, si toutes ses dérivées partielles existent et sont de classe** $\mathcal{C}^1$**.**
On pose alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Théorème 9 . ***Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.***

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, $\overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$, on a :

$$f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\left(\|\overrightarrow{h}\|\right)$$

En particuiler, il existe une application bilnéaire $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tel que :

$$f(a+\overrightarrow{h}) - f(a) = df_a(\overrightarrow{h}) + B(\overrightarrow{h}, \overrightarrow{h}) + o\left(\|\overrightarrow{h}\|\right)$$

Théorème 10 . ***Théorème de Schwarz.***

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Théorème 11 . ***Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en dimension 2.***

Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $(a,b) \in U$, $h = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) + \overrightarrow{h} = (a+x, b+y) \in U$, on a :

$$f(a+x,b+y) - f(a,b) = x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + x^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + y^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b) + o(x^2+y^2)$$

Remarque 7 .

En un point critique (a,b), la formule précedente devient :

$$f(a+x,b+y) - f(a,b) = x^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + y^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b) + o(x^2+y^2)$$

3.2 Extrema des fonctions réelles.

Définition 11 .

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$:

- **On dit que f admet au point a un minimum local, s'il existe un voisinage de $a, V \subset U$ tel que $f(a) \le f(M)$, $\forall M \in V$.**
- **On dit que f admet au point a un minimum local strict, s'il existe un voisinage de $a, V \subset U$ tel que $f(a) < f(M)$, $\forall M \in V$.**
- **On dit que f admet au point a un maximum local, s'il existe un voisinage de $a, V \subset U$ tel que $f(a) \ge f(M)$, $\forall M \in V$.**
- **On dit que f admet au point a un maximum local strict, s'il existe un voisinage de $a, V \subset U$ tel que $f(a) > f(M)$, $\forall M \in V$.**
- **On dit que f admet au point a un extremum local, s'il admet en a un minimum ou maximum local.**
- **On dit que f admet au point a un extremum local strict, s'il admet en a un minimum ou maximum local strict.**

Théorème 12 .

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et admet en $a \in U$ un extremum local, alors

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}.$$

Remarque 8 .
La réciproque du théorème précédent est en général fausse, toute fois on a le résultat suivant :

Théorème 13 .
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}$ (point critique), on pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\ ,\ s = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b)\ ,\ t = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b).$$

- **Si $r^2 - st < 0$ et $s > 0$, alors f admet en (a,b) minimum local strict.**
- **Si $r^2 - st < 0$ et $s < 0$, alors f admet en (a,b) maximum local strict.**
  Dans les deux cas, on dit que (a,b) est un point elliptique.
- **Si $r^2 - st > 0$, alors f n'admet pas en (a,b) d'extrmum local, car $f(x,y) - f(a,b)$ change de signe au voisinage de (a,b).**
  On dit que (a,b) est un point hyperbolique, point col ou selle.
- **Si $r^2 - st = 0$, on ne peut rien dire. On dit que (a,b) est un point parabolique.**

Théorème 14 . *Extrema liés : la règle des multiplicateurs de Lagrange.*
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $V = \{x \in U$ tel que $f_i = 0, \forall 1 \leq i \leq p\}$. Si $f|_V$ admet un extremum local en un point $a \in V$, alors

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\mathbf{grad}} f_i(a).$$

Les coéfficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ s'appellent les multiplicateurs de Lagrange au point a.

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 12 .
- **Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^0$ en un point $a \in U$, si elle est continue en ce point.**
- **Soit $k \in \mathbb{N}^*$, une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ en un point $a \in U$, si f admet au voisinage de a des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ en a.**
- **Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point $a \in U$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en a, $\forall k \in \mathbb{N}$.**
- **L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U se note $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$, en particulier**

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p).$$

Proposition 10 .
- **Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, ainsi $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .**
- **La composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.**

3.4 $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.

Définition 13 .
Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V, toute application bijective $f : U \longrightarrow V$ tel que f et f^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^k$.
Pour $k = 0$, on parle plutôt d'homémorphisme.

Remarque 9 .
Rappelons le resultat suivant :
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ continue bijective, alors f^{-1} est continue, donc f est un homémorphisme.

Théorème 15 . ***Théorème d'inversion locale.***
Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et de classe $\mathcal{C}^k$. Si $\det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$ en un point $a \in U$, alors il existent U_1 voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, V_1 voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que f soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U_1 sur V_1.

Théorème 16 . ***Théorème d'inversion globale.***
Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \longrightarrow V$ bijective et de classe $\mathcal{C}^k$, alors :

$$f \text{ est un } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme de } U \text{ sur } V \text{ si et seulement si } \det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$$

Dans ce cas

$$(df_a)^{-1} = d(f^{-1})_{f(a)},\ \forall a \in U$$

Théorème 17 . ***Théorème des fonctions implicites.***
Soit $n \geq 2$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, alors ils existent U_1 voisinage ouvert de $a' = (a_1, \cdots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_n et $\varphi : U_1 \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que, $\forall x \in V_1,\ \forall y \in I$, on a :

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

Remarque 10 . ***Cas particulier du théorème des fonctions implicites.***
$f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$, alors $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ et $\varphi : I =]a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2[\longrightarrow J =]b - \varepsilon_2, b + \varepsilon_2[$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $\forall x \in I,\ \forall y \in J$, on a : $f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$. En particulier les courbes d'équation $y = \varphi(x)$ et $f(x, y) = 0$ coincident au voisinage du point (a, b) dont ont même tangente :

$$(x - a)\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b)\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

Ainsi, en posant $A = (a, b)$ et $M = (x, y)$, la relation devient $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, c'est à dire que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b)$ (quand il est non nul) est orthogonal au point (a, b) à l'équipotentielle d'équation $f(x, y) = 0$.

Fin
à la prochaine