PRÉPAS ELBILIA

GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN

MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Résumé de cours: *Révision Algèbre Linéaire Programme Sup*

Blague du jour

Une femme arrive et voit son mari avec une tapette à mouche...

- Que fais-tu ?

- Je chasse les mouches... - En as-tu tué ?

- Oui, 3 mâles, 2 femelles

Intriguée, elle lui demande : Comment fais-tu la différence entre les femelles et les mâles ?

3 étaient sur la cafétière et 2 sur le téléphone.

Mathématicen du jour ***Al-Khawarizmi***

***Al-Khawarizmi*, (783-850), est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman arabophone d'origine *ouzbakistan*, plus précisement de la ville *khiva*, appelé jadis *Khwarezm*.**

Il est à l'origine des mots *algorithme* (qui n'est autre que son nom latinisé) et *algèbre* (issu d'une méthode et du titre d'un de ces ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes et de l'habitude de désigner l'inconnue par la lettre x dans une équation.

Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé *le père de l'algèbre* , avec *Diophante* dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

Table des matières

Dans tout le résumé de cours $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

1 Structures d'espaces vectoriels.

1.1 Structures.

Définition 1
On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une LCI + et d'une LCE . à coéfficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant les axiomes suivants :
- $(E,+)$ **est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par** 0_E.
- $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x, \quad \forall x\in E, \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.
- $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y, \quad \forall(x,y)\in E^2, \quad \forall\alpha\in\mathbb{K}$.
- $\alpha(\beta.x)=(\alpha\beta).x, \quad \forall x\in E, \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$.
- $1.x=x, \quad \forall x\in E$.

Définition 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
- $0_E\in F$.
- $\forall(x,y)\in E^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$ **on a :** $x+\lambda y\in F$.

Autrement dit F est une partie de E stable pour les deux lois + et . et qui hérite de E sa structure d'espace vectoriel .

Remarque 1
Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est plus judicieux de remarquer qu'il est inclu dans un espace vectoriel , puis montrer que c'en est un sous-espace vectoriel .

Définition 3
On appelle algébre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux lois de composition interne $+,\times$ et d'une loi de composition externe ,., telle que :

1) $(A,+,.)$ **soit un $\mathbb{K}$-ev**
2) $(A,+,\times)$ **soit un anneau, dont l'élément neutre pour la 2ème loi est noté** 1_A.
3) $\forall(x,y)\in A^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$, **on a :** $\lambda.(x\times y)=(\lambda.x)\times y=x\times(\lambda.y)$

Définition 4
Soit A une algèbre, une partie B de A est dite sous-algébre de A si elle vérifie les propriétés suivantes :
- $1_A\in B$.
- $\forall(x,y)\in B^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$ **on a :** $x+\lambda y\in B$ **et** $x\times y\in B$.

Autrement dit B est une partie de A stable pour les deux lois internes et celle externe, et qui hérite de A sa structure d'algèbre.

1.2 Familles particulières.

Définition 5
Soit E un $\mathbb{K}$-ev , $x\in E, n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n}\in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que x est une combiniason linéaires de x_k si

$$\exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n})\in\mathbb{K}^n \textbf{ tel que } x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k.$$

Définition 6
L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de E, s'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et se note Vect $((x_k)_{1\leq k\leq n})$. Autrement dit

$$x \in \textbf{Vect}\,((x_k)_{1\leq k\leq n}) \Longleftrightarrow \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n \textbf{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Proposition 1
- **Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors Vect($\mathcal{B}$) est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathcal{B}$.**
- **Par convention on écrit, Vect($\emptyset$) $= \{0_E\}$.**

Définition 7
Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit Vect($\mathcal{B}$) $= E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Définition 8
Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 2
1) **Toute famille contenant un élément nul est liée.**
2) **Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.**
3) **Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.**
4) **L'image par une application linéaire d'une famille liée est aussi liée.**

Définition 9
Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 1
Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.

Proposition 3
1) **Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.**
2) **Une famille formée par deux élémentx est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.**
3) **Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.**

Définition 10
On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.

Théorème 2
Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists!(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ s'appellent coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

1.3 Notion de dimension.

Définition 11
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.

Théorème 3 ***Théorème de la base incompléte***
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrice finie pour avoir une base.

Corollaire 1
Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base finie.

Théorème 4
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux familles finies d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On a les propriétés suivantes :
- **Si $\mathcal{B}$ est génératrice et card$\mathcal{C} >$ card$\mathcal{B}$, alors $\mathcal{C}$ est liée.**
- **Si $\mathcal{B}$ est génératrice et $\mathcal{C}$ est libre, alors card$\mathcal{C} \leq$ card$\mathcal{B}$.**
- **Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E, alors card$\mathcal{C} =$ card$\mathcal{B}$.**

Théorème 5
Dans un $\mathbb{K}$-ev, E, de dimension finie toutes les bases sont finie et ont même cardinal, leur cardinal commun s'appelle base de E et se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Théorème 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Si E est de dimension finie, alors F l'est aussi tel que $\dim F \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Théorème 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E. On a les propriétés suivantes :
- **Si $\mathcal{B}$ est génératrice, alors card$\mathcal{C} \geq \dim E$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.**
- **Si $\mathcal{B}$ est libre, alors card$\mathcal{C} \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.**

Définition 12
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, le rang de $\mathcal{B}$, noté rg$(\mathcal{B})$ est défini par la relation suivante :

$$\mathbf{rg}(\mathcal{B}) = \dim \mathbf{Vect}(\mathcal{B}).$$

Définition 13
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors

$$\mathbf{rg}(\mathcal{B}) \leq \mathbf{card}(\mathcal{B}).$$

Avec égalité si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre.

2 Polynômes.

2.1 Degré d'un polynôme.

Définition 14 Soit P un polynôme non nul, de coéfficients a_k, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note $\deg P$.
Ce coéfficient non nul d'indice maximal, s'appelle le coefficient dominant de P et se note $\text{co}(P)$.
Par convention $\deg 0 = -\infty$.
L'ensemble des polynômes à coéfficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$, celui des polynômes de degré inférieur à n, se note $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 2

- $\deg P = n \iff P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ **avec** $a_n \neq 0$.
- $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \iff \deg P \leq n$.

Proposition 4
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a les propriétés suivantes :
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, **vec égalité dans le cas où** $\deg P \neq \deg Q$ **ou bien** $\deg P = \deg Q$ **mais** $\deg P + \deg \neq 0$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

2.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 15
Soit A, B deux polynômes non nuls.
- **On dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.**
- **On dit que A et B sont associés si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $P = \lambda Q$.**
- **Un polynôme est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ quand ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et ses polynômes associés.**

Proposition 5
Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si P divise Q avec $\deg P = \deg Q$.
En particulier tout polynôme de degré 1 est irreductible.

Théorème 8
$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]$ **tel que** $B \neq 0 \quad \exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ **tel que** $\quad A = BQ + R$ **avec** $\deg R < \deg Q$.
Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Remarque 3
B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Algorithme d'Euclide.
Soit A, B deux polynôme non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu'à arriver à un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de A et B de degré minimal, ce reste un fois normalisé, s'appelle le PGCD de A et B et se note $A \wedge B$.

Définition 16
Deux polynômes sont dits premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est égal à 1.

Proposition 6 **Soient P et Q deux polynômes non nuls, et D leurs PGCD, alors**

$$P = DP', Q = DQ' \text{ avec } Q \wedge Q' = 1$$

Théorème 9 ***Théorème de Bezout.***
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } AU + BV = 1$$

Théorème 10 ***Théorème de Gauss.***
Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]$ tel que A divise BC et $A \wedge B = 1$ alors A divise C.

Corollaire 2

- $A \wedge B = A \wedge C = 1 \Longrightarrow A \wedge BC = 1$.
- $A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow A \wedge B^\beta = 1 \Longleftrightarrow A^\alpha \wedge B^\beta = 1$.
- ***Si A et B divisent C et sont premiers entre eux, alors AB divise C.***

2.3 Racines d'un polynôme.

Définition 17
A chaque polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on associé la fonction réelle :

$$\begin{aligned} \widehat{P}(x) : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

appellée fonction polynômiale de P et on dit que $\alpha \in K$ est une racine de P si et seulement si $\widehat{P}(\alpha) = 0$, dans la suite on notera $P(\alpha) = 0$ au lieu de $\widehat{P}(\alpha)$.

Théorème 11
Soit $P \in \mathbb{K}[X], \alpha \in K$, alors α est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 12 ***Théorème de D'Alembert***
Tout polynôme, non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 3

- ***Un polynôme irreductible dans $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 2 n'admet jamais de racine dans $\mathbb{K}$.***
- ***Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximun n racines.***
- ***Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.***

Théorème 13
Tout polynôme, non constant admet au moins un facteur (diviseur) irréductible.

Théorème 14
Tout polynôme, non constant, P se décompse de façon unique en facteurs irreductibles sous la forme

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} \ldots P_r^{\alpha_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et P_i des polynômes irreductibles unitaires.

Corollaire 4

- ***Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme***

$$P(X) = \lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}$$

où les z_i sont les racines de P.
- ***Les polynômes irréductibles dans $]X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ou ceux de degré 2 à descriminant strictement négatif.***
En particulier la décomposition de P dans $]X]$ est de la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{r} \lambda(X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{p} (X^2 - 2\Re e(z_i) + |z_i|^2)^{\beta_i}$$

où les x_i sont les racines réelles de P et z_i ceux complexes non réelles.
Il faut noter que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ racine de P, alors $\overline{z}$ aussi racine de P.

2.4 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 18
Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$, on appelle polynôme dérivé de P, le polynôme noté P' défini par $P'(X) = na_n X^{n-1} + \ldots + a_1$.

Proposition 7

- **Si $\deg P = n$, alors $\deg P' = n - 1$ et $\mathrm{co}(P') = n\mathrm{co}(P)$. En particulier la dérivée d'un polynôme est nul si et seulement si il est constant.**
- **$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$, en conséquence l'application :** $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$ **est linéaire.**

Définition 19
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence la dérivée *k–ème* de P à l'aide de la formule $P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$.
Et on convient d'écrire $P^{(0)} = P$.

Proposition 8

- **Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n - k$ et $\mathrm{co}P^{(k)} = A_n^k \mathrm{co}P$, avec la convention $\mathcal{A}_n^k = 0$ si $k > n$.**
En particulier la dérivée *k–ème* d'un polynôme est nul si et seulement si ce polynôme est de degré inférieur à $k - 1$.
- **Si $\deg = n$ alors $P^{(n)} = n!\mathrm{co}P$.**
- **$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $(P + \lambda Q)^{(k)} = P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}$, en conséquence l'application :** $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-k}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P^{(k)}(X) \end{array}$ **est linéaire.**
- **$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a :**

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)} \textbf{ Formule de Leibniz}$$

Définition 20
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(a) = \dots P^{(n-1)}(a) = 0$ mais $P^{(n)}(a) \neq 0$. Et convient de dire que a est multiplicité nulle dans P lorsqu'elle n'est pas une racine de P.

Théorème 15
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{K}$ on a : $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Théorème 16
Soit $P \in \mathbb{K}[X], n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- **a est une racine de P de multiplicité n**
- **$(X-a)^n$ divise $P, (X-a)^{n+1}$ ne divise pas P.**
- **$\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^n$ avec $Q(a) \neq 0$.**

2.5 Polynômes scindés.

Définition 21 **On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si et seulement si toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}$.**

Remarque 4

- **Tout polynôme non constant est scindé dans $\mathbb{C}$.**
- **Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses racines sont réelles.**

Théorème 17
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$P(X) = \text{co}(P) \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)^{\alpha_k}$$

où z_k sont les racines de P et α_k leurs multiplictés respectives.
En particulier $\deg P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Formules de Viète-Newton entre racines et coefficients d'un polynôme scindé **:**
Soit $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ un polynôme scindé de degré n, et $z_1, \dots, z_n$ ses racines distincts ou non, on a les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum \prod_{i<j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \displaystyle\sum \prod_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array}}$$

3 Applications linéaires.

3.1 Généralités.

Définition 22
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \textbf{ on a : } u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :
- **L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.**
- **Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.**
- **Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.**
- **Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.**

Proposition 9
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes :
- **Si $\mathcal{B} = ((x_k)_{1\leq k\leq n})$ famille de vecteurs de E, et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors :**

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k) \textbf{ en particulier } u\left(\mathrm{Vect}(\mathcal{B})\right) = \mathrm{Vect}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

- **Deux applications linéaires égales sur une famille génératrice sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.**
- **Une application linéaire est nulle si et seulement si elle est nulle sur la base.**
- **Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur la base.**
- **Si $\mathcal{B}$ famille génératrice de E, alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de Im u.**
  En particulier si u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.
- **Si $\mathcal{B}$ est libre dans E et u injective, alors $u(\mathcal{B})$ est libre dans F.**
- **Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F.**

Proposition 10
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes :
- $u(0_E) = 0_F$**.**
- **L'image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .**
- $\ker u = \{x \in E$ **tel que** $u(x) = 0_F\}$ **est un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.**
- **u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.**
- **Im $u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.**
- **u est surjective si et seulement si Im $u = F$.**

Proposition 11
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes :
- $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F),+,.)$ **est un $\mathbb{K}$-ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.**
- **La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E),+,.,\circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.**
- **La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E),\circ)$ est un groupe, on l'appelle *le groupe linéaire de E*.**

3.2 Applications linéaires en dimension finie.

Théorème 18
- **Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.**
- **Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphe si et seulement si ils sont de même dimension.**

Théorème 19
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est de dimension finie avec
$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E).\dim_{\mathbb{K}}(F)$$

3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 23
Le rang d'une application linéaire, u, noté rg(u) est défini par la rzlation suivante :
$$\text{rg}(u) = \dim \mathbf{Im}\ u.$$

Théorème 20 ***Formule du rang***
Soit $u : E \to F$ linéaire avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on a le résultat suivant :
$$\dim E = \dim \ker u + \dim \mathbf{Im}\ u$$

Corollaire 5
Soit $u : E \to F$ linéaire, on a les propriétés suivantes :
- *u **est injective si et seulement si rg**$(u) = \dim E$.*
- *u **est surjective rg**$(u) = \dim F$.*
- *u **est bijjective rg**$(u) = \dim E = \dim F$.*

Corollaire 6
Le rang est invariant par composition à gauche ou a droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors : $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$ ***et*** $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$.

Corollaire 7
Soit $u : E \to F$ linéaire où E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes : u ***isomorphisme*** $\iff u$ ***injective***
$\iff u$ ***injective***

Corollaire 8
Un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini est bijectif si et seulement si il est injectif.

4 Somme d'espaces vectoriels.

4.1 Généralités.

Définition 24
Soit E un espace vectoriel , F et G deux sous-espace vectoriel de E.
- **On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel de E noté $F+G$ défini par la relation suivante**

$$x \in F+G \Longleftrightarrow \exists x_1 \in F,\ \exists x_2 \in G \textbf{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

- **Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note par $F \oplus G$.**
- **Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E, et dans ce cas**

$$\forall x \in E,\ \exists! x_1 \in F \textbf{ et } \exists! x_2 \in G \textbf{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Remarque 5
Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathcal{B}_1 \subset F, \mathcal{B}_2 \subset G$, alors :
- **$\textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_1) + \textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_2)$.**
- **Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_1) \oplus \textbf{Vect}\,(\mathcal{B}_2)$.**

Théorème 21
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 9
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémenttaires alors : $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 10
Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

4.2 Projection et projecteur.

Définition 25
Si $E = F \oplus G$, on rappelle que $\forall x \in E,\ \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
- **x_1 s'appelle la projection de x sur F parallélement à G et se note $p_{F//G}(x)$.**
- **x_2 s'appelle la projection de x sur G parallélement à F et se note $p_{G//F}(x)$.**

Proposition 12
Avec les notations précédentes l'application : $p = p_{F//G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_1 = p_{F//G}(x) \end{array}$ est linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

1) $p^2 = p$.

2) **Im** $p = F,\ \ker p = G$ **en particulier**

$$E = \textbf{Im } p \oplus \ker p.$$

Définition 26
On appelle projecteur sur E, tout endomorphisme, p de E tel que

$$p^2 = p.$$

Proposition 13
Soit p un projecteur de E, on a les propriétés suivantes :

1) $E = \mathbf{Im}\ p \oplus \ker p$.

2) $x \in \mathbf{Im}\ p \Longleftrightarrow p(x) = x$.

3) p **est la projection sur son image paraléllement à son noyau.**

Conclusion. Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image paraléllement à son noyau.

4.3 Symétries.

Définition 27
On appelle symétrie sur E, tout endomorphisme, s de E tel que $: s^2 = id_E$.

Proposition 14
Soit s une symétrie de E, on a les propriétés suivantes :

1) $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ **est un projecteur.**

2) **En posant** $F = \mathbf{Im}\ p$ **et** $G = \ker p$**, on a** $E = F \oplus G$ **avec** $s(x) = \begin{cases} x & \forall x \in F \\ -x & \forall x \in G \end{cases}$.
On dit alors que s est la symétrie par rapport à F parallélement à G.

3) **Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s = 2p - id_E$ sur $\mathbf{Im}\ p$ parallélement à $\ker p$.**

5 Matrices.

5.1 Généralités.

5.1.1 Trace d'une matrice carré.

Définition 28
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, le nombre notée $\mathbf{tr}(A)$, défini par la relation suivante :

$$\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 15
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriètes suivantes :
– $\mathbf{tr}(A + \lambda B) = \mathbf{tr}(A) + \lambda \mathbf{tr}(B)$.
– $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$.
– $\mathbf{tr}(P^{-1}AP) = \mathbf{tr}(A)$.

5.1.2 Transposée d'une matrice.

Définition 29
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A, la matrice notée ${}^tA$, défini par la relation suivante :

$${}^tA = (a_{j,i})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Proposition 16
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriètes suivantes :
- ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB$.
- ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.
- ${}^tP$ **est inversible, avec** $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

5.2 Matrices en tant qu'applications linéaires.

Remarque 6
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$$

est linéaire. Ainsi toute matrice peut être étudiée comme application linéaire, avec :

1) $X \in \ker M \Longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^P$ **et** $MX = 0$.
2) $Y \in \mathbf{Im}\ M \Longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^n$ **et** $\exists X \in \mathbb{K}^p$ **tel que** $Y = MX$.
   En particulier $\mathbf{rg}(M) = \dim \mathbf{Im}\ M = \mathbf{rg}($**colonnes de** $M)$.
3) $\mathbf{rg}(M) + \dim\ker M = p =$**nombre de colonnes de** M.

Proposition 17
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : M **est inversible** $\Longleftrightarrow \ker M = \{0\}$
$\Longleftrightarrow rg(M) = n$

Théorème 22
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

5.3 Matrice d'une application linéaire.

Définition 30
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice notée

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

dont la j–ème colonne est formée par les coordonnées de $u(e'_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{c|ccc} & u(e_1) & \dots & u(e_n) \\ e'_1 & & & \\ \vdots & & & \\ e'_p & & & \end{array}$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 18
Soient E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (e_i), \mathcal{B}_2 = (e'_j)$ et $E \xrightarrow{u} F$ une application linéaire. On a les propriétés suivantes :
– **Si $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ alors**

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i$$

– **Soit $x \in E$, et X la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et Y celle formée par les coordonnés de $y = u(x)$ dans $\mathcal{B}_2$ alors l'équation linéaire $y = u(x)$ s'écrit sous la forme matricielle**
$$Y = MX.$$

Proposition 19
Avec les notations de la proposition suivante, on a les propriétés suivantes
– **Si $u, v : E \longrightarrow F$ est linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v).$$

– **$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.**
En particulier deux applications linéaires sont égales si et seulement si leurs matrices associées dans les mêmes bases sont égales.
– **Ainsi on définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre**

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{M} : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$$

– **Si E, F, G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ applications linéaires alors :**

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$

– **Si E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $E \xrightarrow{u} F$ application linéaire alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas**
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

5.4 Matrice de passage entre deux bases.

5.5 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 31
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice à n lignes et p colonnes notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ dont les colonnes sont formées par les coordonnés des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Proposition 20
Avec les notations de la définition précèdente on a :

$$\mathbf{rg}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \mathbf{rg}(\mathcal{C})$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

5.6 Matrice de passage entre deux bases

Définition 32
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Proposition 21
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, on a les résultats suivants :
- $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)$
- **Soit $x \in E$, $X_1 = [x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne formée par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 = [x]_{\mathcal{B}_2}$ celle formée par ses coordonnés dans $\mathcal{B}_2$ alors :**

$$X_1 = PX_2$$

Théorème 23
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel . $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit $u : E \to F$ linéaire. Posons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u),\ N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}'_1},\ Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ on a les résultats suivants :
- $M = P.N.Q$
- **Si u est un endomorphisme de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u), N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u), P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ alors**

$$M = P^{-1}.N.P$$

Corollaire 11

- ***Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles representent la même application linéaire dans des bases différentes.***
- ***Deux matrices sont semblables si et seulement si elles representent le même endomorphisme dans deux bases différentes.***

6 Déterminants.

6.1 Formes n-linéaires.

6.1.1 Formes bilinéaires.

Définition 33
On appelle forme bilinéaire sur E, toute application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ **linéaire par rapport à l'une des variables fixant l'autre, autrement dit :**

$$\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y)$$
$$\varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda\varphi(x, y_2)$$

Proposition 22
Soit φ une forme bilinéaire sur E, $(x, y) \in E^2$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants :
- $\varphi(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\varphi(x, y)$.
- $\varphi(x, y) = 0$ **si** $x = 0_E$ **ou** $y = 0_E$.

Définition 34
Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que :
- φ **est symétrique si et seulement si** $\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$.
- φ **est antisymétrique ou bien alternée si et seulement si** $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$.

Proposition 23
Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x,x)=0$.
- $\varphi(x,y+\lambda x)=\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y)=0$ **si** $\{x,y\}$ **est liée.**

Théorème 24
Toutes les formes bilinéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 sont proprtionnelles.

6.1.2 Formes n-linéaires.

Définition 35
On appelle forme n-linéaire sur E, toute application

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\underbrace{E\times\ldots\times E}_{n\text{ fois}} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \varphi((x_1,\ldots,x_n))\end{array}$$

linéaire par rapport à chacune de ses variables en fixant les autres, autrement dit :
- **Linéarité par rapport à la première variable :** $\varphi\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,y_2,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(x_i,y_2,\ldots,y_n)$.
- **Linéarité par rapport à la deuxième variable :** $\varphi\left(y_1,\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,y_3,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1x_i,y_3,\ldots,y_n)$.
- **Linéarité par rapport à la dernière variable :** $\varphi\left(y_1,\ldots,y_{n-1},\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1},x_i)$.

Proposition 24
Soit φ une forme n-linéaire sur E, $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a les résultats suivants :
- $\varphi(\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n)=\prod_{i=1}^n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ **si l'un des x_i est nul.**

Proposition 25
Soit φ une forme n-linéaire sur E, on dit que :
- φ **est symétrique si et seulement si :**
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varphi(x_1,\ldots,x_n)\quad\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$.
- φ **est antisymétrique si et seulement si**
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\ldots,x_n)\quad\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=-\varphi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$,
  $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E^n,\forall 1\leq i\neq j\leq n$.

Proposition 26
Soit φ une forme bilinéaire, alors φ est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique.

Proposition 27
Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$ **si** $\exists i\neq j$ **tel que** $x_i=x_j$.
- $\varphi\left(x_1,\dots,x_i+\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$ **si** $\{x_1,\dots,x_n\}$ **est liée.**

Théorème 25
Toutes les formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sont proprtionnelles.

6.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

6.2.1 Généralités.

Définition 36
Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E=n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, l'unique forme n-linéaire alternée définie sur E^n notée $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation suivante : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1$

Proposition 28
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que card$\mathcal{B}'=\dim E$, on a les résultats suivants :
- $\mathcal{B}'$ **est liée si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=0$.
- $\mathcal{B}'$ **est libre si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\neq 0$.
- $\mathcal{B}'$ **est une base de E si et seulement si** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\neq 0$**, et dans ce cas on a :**

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})=\frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

6.2.2 Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

***Principe* : Orienter E revient à se fixer une base $\mathcal{B}_0$, toute autre base $\mathcal{B}$ est dite directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})>0$, dans le cas contraire c'est à dire si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})<0$ elle est dite indirecte.**
En général les bases canoniques sont directes et orientent l'espace vectoriel .
Équation d'une droite du plan.
Si D est la droite du plan passant par le point A est dirigée par le vecteur $\vec{u}$, alors son équation s'obtient à l'aide da la relation suivante :
$M\in D\Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\vec{AM},\vec{u})=0$ **où** $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$ **la base canonique de** $\mathbb{R}^2$.

6.3 Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 37
Soit $u:E\longrightarrow E$ un endomorphisme, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépond pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors $\det(u)=\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ et on l'appelle le déterminant de u.

Proposition 29
Soit $u, v : E \longrightarrow E$ **deux endomorphismes de** E **tel que** $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ **une base de** E **et** $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ **famille d'élements de** E**, on a les résultats suivants :**
– $\det(id_E) = 1$.
– $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
– $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
– u **est un automorphisme de** E **si et seulement si** $\det(u) \neq 0$, **avec** $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$

6.4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n.

Définition 38
Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n**,**
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**, noté** $\det(A)$ **est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de** $\mathbb{K}^n$**.**

Notation.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$**, son déterminant se note aussi** $|a_{i,j}|$**.**

Proposition 30

– **Si** E **est un** $\mathbb{K}$**-ev de dimension finie, de base** $\mathcal{B}$ **et** u **un endomorphisme de** E**, alors :** $\det u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.
– $\det(I_n) = 1$.

Proposition 31

– **Soit** $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$**, alors** $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
– **Soit** $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ **alors** $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$ **où** $A_{i,j}$ **est la matrice obtenue en enlevant la** i**–ème ligne et** j**–ème colonne,** $\det(A_{i,j})$ **s'appelle cofacteur d'indice** (i, j)**, la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de** A **et se note** $Com(A)$**. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la** j**–ème colonne.**
– **Si** $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ **alors** $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq i \leq n$**. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la** j**–ème colonne.**

Proposition 32

– **Si** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$ **sont deux bases de** E**, alors** $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ **où** P **est la matrice de passage de** $\mathcal{B}$ **vers** $\mathcal{B}'$**.**
– $A = (a_{i,j})$ **est inversible si et seulement si** $\det(A) \neq 0$ **et dans ce cas :**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}Com(A)$$

– $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
– **Si** P **est inversible alors** $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

Fin
à la prochaine