

## Résumé de cours: *Suites et séries de fonctions*

### Blague du jour :

Un prof de math explique à ces élèves de faire attention avant de répondre lors d'un oral de concours, et s'assurer que ce qu'ils allaient dire est juste :

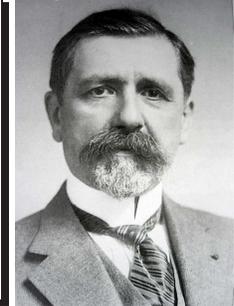
- Les intelligents sont toujours dans le doute. Seuls les imbéciles sont constamment affirmatifs.
- Vous en êtes certain ? demande un élève.
- Absolument certain !

### Mathématicien du jour

### Borel

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), mathématicien français, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, a été aussi un homme politique, député, ministre, résistant et prisonnier de guerre, il fût décoré par le Grand-croix de la Légion d'honneur, par la Croix de guerre et par la Médaille de la Résistance.

Il fût premier de sa promotion premier à l'École polytechnique, à l'École Normale, et à l'agrégation de mathématiques. Il était parmi les pionniers de la théorie de la mesure et de son application à la théorie des probabilités et de jeux.



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Modes de convergence</b>	<b>2</b>
1.1	Suites de fonctions . . . . .	2
1.1.1	Convergence simple . . . . .	2
1.1.2	Convergence uniforme . . . . .	2
1.1.3	Critère de Cauchy uniforme. . . . .	3
1.2	Séries de fonctions. . . . .	3
1.2.1	Convergence simple . . . . .	3
1.2.2	Convergence absolue . . . . .	3
1.2.3	Convergence normale . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Théorèmes d'approximations</b>	<b>4</b>
2.1	Fonctions en escalier . . . . .	4
2.2	Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Continuité de la limite uniforme</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Dérivée de la limite uniforme</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Intégrale de la limite uniforme</b>	<b>6</b>
5.1	Fonction réglée . . . . .	6
5.2	Intégration sur un segment . . . . .	7
5.3	Intégration sur un intervalle quelconque. . . . .	7

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie  $F$ .

# 1 Modes de convergence

## 1.1 Suites de fonctions

### 1.1.1 Convergence simple

Étant donnée une suite  $(f_n)$  de fonctions définies sur une partie  $A$  de  $E$  à valeurs dans un evn de dimension finie  $F$ .

#### Convergence simple

**Définition 1** La suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $A$  vers  $f$ , si pour tout élément  $x$  de  $A$ , la suite  $(f_n(x))$  converge vers  $f(x)$ .  
On dit alors que  $f$  est limite simple sur  $A$  de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

#### Remarque 1

- 1) Il est clair que  $f$  est unique puisque pour tout  $x \in A$ , la suite  $(f_n(x))$  a une limite unique.
- 2) On dit que  $(f_n)$  converge simplement sur  $A$  si elle existe  $f$  telle que  $(f_n)$  converge simplement sur  $f$ .
- 3) Si  $X \subset A$  on dit que la suite converge simplement sur  $X$  si la suite des restrictions de  $(f_n)$  sur  $X$  converge simplement.

### 1.1.2 Convergence uniforme

**Définition 2** La suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  vers  $f$ , si pour tout élément  $x$  de  $A$ , la suite  $\|f_n - f\|_\infty$  converge vers 0.  
On dit alors que  $f$  est limite uniforme sur  $A$  de la suite de fonctions  $(f_n)$ .

#### Remarque 2

- 1) En notant  $R_n = \sup \|f_n(x) - f(x)\| \in \overline{\mathbb{R}}$ , la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  est équivalente la convergence de la suite  $(R_n)$  vers 0. Donc pour montrer qu'une suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  il suffit qu'il existe une suite de réels  $(\varepsilon_n)$  qui tend vers 0 telle que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n$
- 2) Pour montrer qu'une suite de fonction  $(f_n)$  ne converge pas uniformément il suffit d'exhiber une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  tel que  $f_n(x_n) - f(x_n)$  ne tend pas vers 0.  
En effet  $R_n = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \geq f_n(x_n) - f(x_n)$ .
- 3) On dit que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  si elle existe  $f$  telle que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $f$ . La limite  $f$  est souvent calculer par la convergence simple.
- 4) Si  $X \subset A$  on dit que la suite converge uniformément sur  $X$  si la suite des restrictions de  $(f_n)$  sur  $X$  converge uniformément.
- 5) Si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $A$  alors converge uniformément sur toute partie  $X \subset A$ .
- 6) L'écriture formelle de la convergence simple et uniforme de la suite  $(f_n)$  vers  $f$  est respectivement :
  - CS :  $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ .
  - CU :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

**Proposition 1** Si la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  alors  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ .

### 1.1.3 Critère de Cauchy uniforme.

**Définition 3** Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions définie de  $A$  vers un espace vectoriel normé  $F$ , on dit que la suite  $(f_n)$  est uniformément de Cauchy sur  $A$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N, m \geq N) \Rightarrow \forall x \in A, \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon.$$

**Théorème 1** Si  $F$  est un Banach,  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  si et seulement si  $f$  vérifie le critère de Cauchy uniforme.

**Remarque 3**  $\mathcal{B}(A, F)$ , l'espace de fonctions bornées sur  $A$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est complet.

## 1.2 Séries de fonctions.

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $F$ , comme pour les séries dans un espace vectoriel normé, on note  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  la somme partielle.

### 1.2.1 Convergence simple

**Définition 4** On dit que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$  si  $\forall x \in A, \sum f_n(x)$  converge. Dans ce cas :

- la fonction somme est notée  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , et on a  $\forall x \in A, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$
- le reste et la suite de fonction définie par :  $\forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ .
- On a  $\forall x \in A, S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ .

L'ensemble des éléments tel que  $\sum f_n(x)$  converge s'appelle domaine de convergence simple.

#### Convergence uniforme

On dit que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  si  $(S_n)$  converge uniformément sur  $A$ .

On la convergence uniforme implique la convergence simple.

**Proposition 2** Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge vers 0 sur  $A$ .

**Remarque 4**  $(f_n)$  peut converger vers 0 sans que  $\sum f_n$  converge uniformément.

**Proposition 3** Une série convergeant simplement vers  $f$  converge uniformément si et seulement si  $R_n$  converge uniformément vers 0

**Définition 5** On dit que la suite  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $A$  si quelle que soit la partie  $K$  compact de  $A$  la suite  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $K$ .

### 1.2.2 Convergence absolue

**Définition 6** On dit que la suite  $\sum f_n$  converge absolument sur  $A$  si quelle que soit  $x$  de  $A$ , la suite  $\sum \|f_n(x)\|$  converge.

**Proposition 4** Si la série  $\sum f_n$  converge absolument sur  $A$ , alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ .

### 1.2.3 Convergence normale

**Définition 7** On dit que la suite  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$  si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(A, F)$ ,
- la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge.

**Proposition 5** Si la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $A$ , alors  $\sum f_n$  converge absolument et uniformément sur  $A$ , et l'on a :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \right\|_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$$

## 2 Théorèmes d'approximations

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et valeurs dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie.

### 2.1 Fonctions en escalier

### 2.2 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ .

**Théorème 2** Toute fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ , valeurs dans  $F$ , est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers sur  $[a, b]$ .

Ce qui peut se traduire par :

- $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], F), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E}([a, b], F), \|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$
- $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], F), \exists (f_n) \in (\mathcal{E}([a, b], F))^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$

**Théorème 3** Toute fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , valeurs dans  $F$ , est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux sur  $[a, b]$

**Théorème 4 Premier théorème de Stone-Weirstrass**

Toute fonction complexe continue sur un segment  $[a, b]$ , valeurs dans  $\mathbb{C}$ , est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes de la forme  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

**Théorème 5 Deuxième Théorème de Weirstrass**

Toute fonction complexe  $2\pi$ -périodique valeurs dans  $\mathbb{C}$ , est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques de la forme  $P(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

## 3 Continuité de la limite uniforme

**Théorème 6 Théorème de la double limite ou interversion des limites.**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(A, F)$  et  $a \in \bar{A}$ .

- Si pour tout  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe.
- Si la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ ,

alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$  existent et sont égales, plus précisément :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

**Théorème 7** *Théorème de la continuité de la limite uniforme.*

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(A, F)$  et  $a \in A$ .  
– Si pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue en  $a$   
– Si la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ ,  
alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Théorème 8** *Théorème d'interversion des limites et sommes.*

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(A, F)$  et  $a \in \bar{A}$ .  
– Si pour tout  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe.  
– Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ ,  
alors  $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  converge et sont égales, plus précisément :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

**Théorème 9** *Théorème de la continuité de la somme.*

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{F}(A, F)$  et  $a \in A$ .  
– Si pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue en  $a$   
– Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ ,  
alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue en  $a$ .

**Remarque 5** Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.

## 4 Dérivée de la limite uniforme

$I$  tant un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit un point,  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  désigne l'espace des fonctions de  $I$  dans  $F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Théorème 10** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{C}^1(I, F)$  telle que :

- $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f \in \mathcal{F}(I, F)$ .
  - La suite  $(f'_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $g \in \mathcal{F}(I, F)$ .
- Alors
- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  avec  $f' = g$ .
  - la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment de  $I$ .

**Théorème 11** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{C}^k(I, F)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  telle que :

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  la suite  $(f_n^{(j)})_n$  converge simplement sur  $I$  ;
  - La suite  $(f_n^{(k)})_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $g \in \mathcal{F}(I, F)$ .
- Alors la fonction  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  avec  $f^{(k)} = g$  et chaque suite  $(f_n^{(j)})_n, j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $f^{(j)}$ .

**Théorème 12** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{C}^\infty(I, F)$  telle que :

- pour tout  $j \in \mathbb{N}$  la suite  $(f_n^{(j)})_n$  converge simplement sur  $I$  ;
  - il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq p$ , La suite  $(f_n^{(k)})_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .
- Alors la fonction  $f = \lim f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  et chaque suite  $(f_n^{(j)})_n, j \in \mathbb{N}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $f^{(j)}$ .

**Théorème 13** *Dérivation terme à terme*

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $C^1(I, F)$  telle que :

- la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  ;
- la série  $\sum f'_n$  converge uniformément sur tout segment  $J$  de  $I$ .

Alors la fonction somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  avec :  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$

**Théorème 14** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $C^k(I, F), k \in \mathbb{N}$  telle que :

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  la série  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  ;
- La série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^k$  sur  $I$  et chaque série  $\sum f_n^{(j)}$  où  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$  converge

uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$ . Plus précisément :

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

**Théorème 15** Soit  $\sum u_n$  une série de fonctions de  $C^\infty(I, F), k \in \mathbb{N}$  telle que :

- pour tout  $j \in \mathbb{N}$  la série  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$  ;
- il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq p$ , La série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors la fonction  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et chaque série  $\sum f_n^{(j)}, j \in \mathbb{N}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  avec

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

**Remarque 6** Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.

## 5 Intégrale de la limite uniforme

### 5.1 Fonction réglée

**Définition 8** On appelle fonction réglée sur un segment  $[a, b]$  à valeurs dans un espace vectoriel normé,  $F$  de dimension finie, toute application  $f : [a, b] \rightarrow F$  telle que

- $\lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$  existe  $\forall x \in ]a, b[$ .
- $\lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$  existe  $\forall x \in [a, b[$ .

L'ensemble de telles fonctions se note  $\mathcal{R}([a, b], F)$ .

**Remarque 7**

- Toute fonction continue par morceaux est réglée, en particulier toute fonction continue ou en escalier sur  $[a, b]$  est réglée.
- Toute fonction réglée est bornée
- La limite uniforme de fonctions réglées est réglée.
- $\mathcal{R}([a, b], F)$  est un fermé pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Théorème 16**

- Pour toute fonction réglée  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \varphi, \psi$  en escalier sur  $[a, b]$  telles que  $\varphi \leq f \leq \psi$ ,  $\psi - \varphi \leq \varepsilon$
- Pour toute fonction réglée  $f : [a, b] \rightarrow F$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \varphi$  en escalier sur  $[a, b]$  telles que  $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$
- Toute fonction réglée est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers est une fonction réglée.

**5.2 Intégration sur un segment**

**Théorème 17** Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  fonction réglée et  $\varphi_n : [a, b] \rightarrow F$  une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers  $f$ . Alors la suite  $\left( \int_a^b \varphi_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et sa limite ne dépend pas du choix de la suite  $(\varphi_n)$ . On pose alors :  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt$

**Remarque 8** L'intégrale d'une fonction réglée hérite de toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers, plus précisément si  $f, g : [a, b] \rightarrow F$  réglées et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a les propriétés suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.</math></li> <li>- <math>f \geq 0 \implies \int_a^b f(t) dt \geq 0.</math></li> <li>- <math>f \geq g \implies \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt.</math></li> <li>- <math>\left\  \int_a^b f(t) dt \right\  \leq \int_a^b \ f(t)\  dt.</math></li> <li>- <math>\int_a^a f(t) dt = 0</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt, \forall c \in [a, b].</math></li> <li>- <math>\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.</math></li> <li>- l'application <math>F(x) = \int_a^x f(t) dt</math> est dérivable à gauche et à droite en tout point <math>x \in [a, b]</math>, avec <math>F'(x^+) = f(x^+)</math> et <math>F'(x^-) = f(x^-)</math>.</li> </ul> |
|---|--|

**Théorème 18** Si  $f_n$  est une suite de fonctions réglées qui converge uniformément vers  $f$ , alors  $f$  est réglée avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

**Théorème 19 Intégration terme à terme.**

Si  $\sum f_n$  est une série de fonctions réglées qui converge uniformément, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

**5.3 Intégration sur un intervalle quelconque.**

Dans tout la suite  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide.

**Définition 9**

- Soit  $f : I \rightarrow F$ , on dit que  $f$  est réglée sur  $I$  si et seulement si elle est réglée sur tout segment  $[a, b] \subset I$ .
- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\left\{ \int_{[a,b]} f \text{ tel que } [a,b] \subset I \right\}$  est majoré, on pose alors  $\int_I f = \sup_{[a,b] \subset I} \int_{[a,b]} f$
- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $f^+$  et  $f^-$  est intégrable, on pose alors  $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$
- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\text{Re}f$  et  $\text{Im}f$  sont intégrables, on pose alors  $\int_I f = \int_I \text{Re}f + i \int_I \text{Im}f$
- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $f_i$  et  $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$  sont intégrables, on pose alors  $\int_I f = \left( \int_I f_1, \dots, \int_I f_n \right)$

**Proposition 6** Soit  $f : I \rightarrow F$  réglée, on a les résultats suivants :

- $f$  intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\|f\|$  intégrable sur  $I$ , dans ce cas  $\left\| \int_I f \right\| \leq \int_I \|f\|$ .
- Si  $f$  est intégrable sur  $I$  et  $(J_n)$  une suite exhaustive de segments  $I$ , alors  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{J_n} f$ .

**Théorème 20 Théorème de convergence monotone**

Soit  $(f_n)$  une suite croissante ( $f_n \leq f_{n+1}$ ) de fonctions réglées positives intégrables sur  $I$  qui converge simplement vers une fonction réglée  $f$ . Alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $\left( \int_I f_n \right)$  est majorée, dans ce cas, on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$

**Théorème 21 Théorème d'intégration terme à terme**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions réglées intégrables sur  $I$  qui converge simplement. Alors  $f$  est intégrable si et seulement si  $\sum \int_I \|f_n\|$  converge, dans ce cas, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I \|f_n\| \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

**Théorème 22 Théorème de convergence dominée**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions réglées intégrables sur  $I$  qui converge simplement vers une fonction réglée  $f$ . Si  $\exists \varphi$  réglée positive et intégrable sur  $I$  telle que  $\|f_n\| \leq \varphi, \forall n \in \mathbb{N}$ , alors  $f$  est intégrable avec :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$

*Fin*  
*À la prochaine*