My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاِي اسماعِيل

MATH PrEPaS

MP

Dénombrement

Nature : Chapitre de formules et astuces
Difficulté : ***
Importance : **

Objectifs

1. Apprendre les formules de cardinal
2. Savoir exploiter les théorèmes généraux pour mq A=B ou que f est bijective

1. Théorèmes Généraux

Définition 1
On dit qu'un ensemble non vide A est fini $\Longleftrightarrow \exists n \in IN^*$ et $\exists f : [|1,n|] \rightarrow A$ bijective
On dit que A et $[|1,n|]$ sont équipotents

Théorème 1
Soit A un ensemble non vide
Alors A est fini $\Longleftrightarrow \exists! n \in IN^*$ et $\exists f : A \rightarrow [|1, n|]$ bijective

Demo : Admise

Définition 2
Soit A un ensemble fini
Soit $n \in IN^*$ tq $\exists f : A \rightarrow [|1, n|]$ bijective
n s'appelle le cardinal de A et se note card(A) et désigne le nombre des éléments dans A

Convention
$\varnothing$ est fini avec card($\varnothing$) =0
Si A est infini, on pose car(A)=$+\infty$

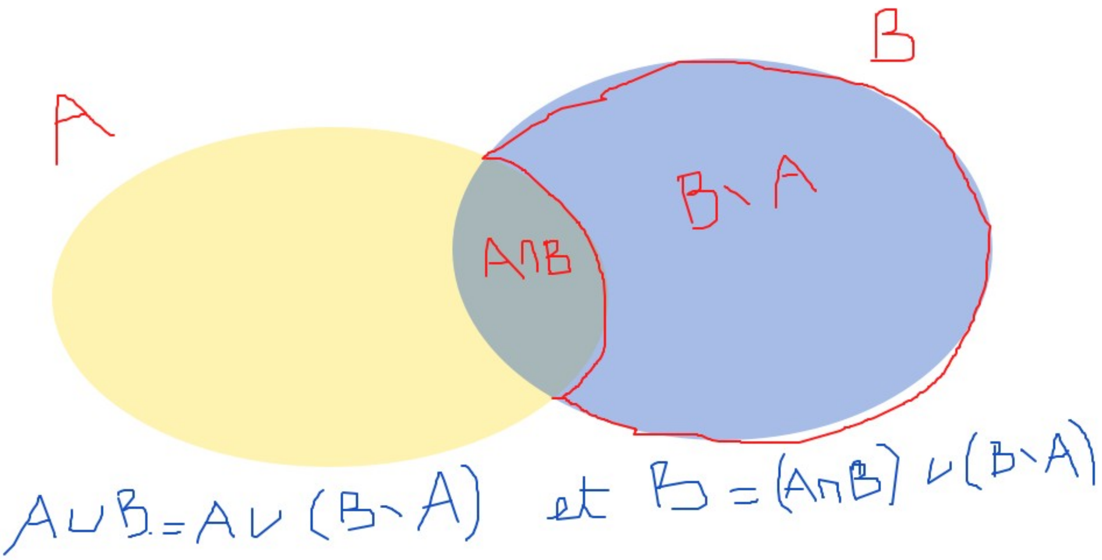
Théorème 1
Soit A et B deux ensembles finis tq $A \cap B = \varnothing$
Alors
- $A \cup B$ est fini
- $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

Demo :
Posons card(A)=n et $f : A \rightarrow [|1, n|]$ bijective
Posons card(B)=p et $g : B \rightarrow [|1, p|]$ bijective
Montrer que $h : A \cup B \rightarrow [|1, n+p|]$ est bijective avec h définie par
$h(x) = f(x)$ si $x \in A$
$\quad = n+g(x)$ si $x \in A$

Théorème 2
Soit A et B deux ensembles finis
Alors

- $A \cup B$ est fini
- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Demo :
$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ avec $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$
Selon Thm 1 : $A \cup B$ est fini avec $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$
D'autre part $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ avec $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$
Selon Thm 1 : $\text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A)$
Ainsi $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
Et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$



Astuce
En dénombrement, il faut toujours avoir le souci d'enlever les répétitions (si il y en a)

Théorème 3 : Formule du crible
Soit A, B et C trois ensembles finis
Alors

- $A \cup B \cup C$ est fini
- $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

Demo : à faire
$card[(A \cup B) \cup C)] = card(A \cup B) + card(C) - card[(A \cup B) \cap C] = ...$

Théorème 4 : Très utile
Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des ensembles finis deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$)
Alors

- $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ est fini
- $card\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} card(A_i)$

Demo :
Par récurrence sur $n \geq 2$

Théorème 5 : Très utile
Soit A, B deux ensembles finis, on a les résultats suivants

- $A \subset B \Rightarrow card(A) \leq card(B)$
- $A \subset B$ et $card(A) = card(B) \Rightarrow A = B$

Demo : Admise

Astuce
Si A et B deux ensembles finis
Pour montrer que A=B, il suffit de montrer que

- $A \subset B$
- $card(A) = card(B)$

Théorème 6 : Très utile
Soit A, B deux ensembles finis, alors
- A x B est fini
- card(A x B)=card(A) . card(B)

Demo :
Si card(A)=1 et card(B)=p
Si $A=\{x\}$ et $B=\{y_1, \ldots, y_p\}$, alors $AxB=\{ (x,y_1), \ldots, (x,y_p)\}$,
Donc card(AxB)=p
Si card(A)=n et card(B)=p
Si $A=\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $B=\{y_1, \ldots, y_p\}$, alors
$AxB=\bigcup_{1\leq i\leq n} \{ (x_i,y_1), \ldots, (x_i,y_p)\}$
Donc $card(AxB)=card \bigcup_{1\leq i\leq n} \{ (x_i,y_1), \ldots, (x_i,y_p)\}$
$=\sum_{1\leq i\leq n} card \{ (x_i,y_1), \ldots, (x_i,y_p)\}$
$= \sum_{1\leq i\leq n} p = np =card(A). card(B)$

Astuce 2
En probas, pour dénombrer une situation à n multiples choix et successives, il suffit de
- schématiser la situation sous forme d'une liste à n cases
- calculer le nombre de cas possibles pour chaque case
- utiliser la formule : Nbr total = produit des nbr de chaque case

Exercice
1. Combien peut former de nombre à 4 chiffres
2. Parmi ces chiffres, combien y'en a t-il de multiples de 5
3. On choisit un nombre à 4 chiffres au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit un multiple de 5

Solution
1. un nombre à 4 chiffres est une liste à 4 cases
   case 1 : 9 cas (0 exclu), cases 2 , 3 et 4: 10 cas (0 inclus)
   Total = $9.10.10.10 = 9.\ 10^3$
2. un nombre à 4 chiffres multiple de 5 est une liste à 4 cases
   case 1 : 9 cas (0 exclu), cases 2 , 3 : 10 cas (0 inclus)
   case 4 : 2 cas (0 ou 5). Total = $9.10.10.2 =18.\ 10^2$
3. probabilité=Nbr de cas favorable/Nbr de cas possible
   $=18.10^2 / 9.\ 10^3=2/10 =1/5$
   Un nombre à 4 chiffres sur 5 est un multiple de 5

Exercice :

1. On tire simultanément deux dé de couleur différentes, l’un rouge et l’autre noir, puis on mise sur les numéros de chacune des deux faces
   1. Combien de cas possibles peut on avoir
   2. parmi ces cas, combien y en a il où la face du dé noir est pair
   3. parmi ces cas, combien y en a il où la face du dé noir est pair et celle du dé rouge est impaire
   4. parmi ces cas, combien y en a il de cas où les deux faces sont de même parité
2. Reprendre les mêmes question si cette fois, les deux dès de sont de même couleurs (par exemple les deux dés sont noirs)

Solution

1. Les cas possibles de cette expériences peuvent être représentés par une liste à deux cases :
   case 1 : Face du dé noir (6 cas possibles)
   case 2 : Face du dé rouge (6 cas possibles)
   1. Total : 6x6=36
   2. Les cas possibles de cette expériences peuvent être représentés par une liste à deux cases :
   case 1 : Face du dé noir est pair (3 cas possibles)
   case 2 : Face du dé rouge qlq (6 cas possibles)
   Total = 6 x3=18
   3. Total = 9
   4. Total = 9
2. Les cas possibles de cette expériences peuvent être représentés par une liste à deux cases :
   case 1 : Face du dé noir (6 cas possibles)
   case 2 : Face du dé noir (6 cas possibles)
   Total = 36 – répétitions
   répétitions =(1,2), (1,3) ….(1,6)
   (2,3), …. (2,6)
   ….
   Il y en a 15 répétitions

Astuce
A partir de n éléments on peut construire n ! situations identiques (si on ne tient pas compte de l'ordre)

{a,b,c} => (a,b,c),(a,c,b),(b,c,a), (b,a,c), (c,a,b) et (c,b,a)

Astuce
Dans le cas d'une liste, pour éviter les repitition,
on divise par les k ! où k=nbr d'objets qui se répetent

Exercice

1. Combien peut on former d'anagrammes à partir du mot MATH
2. Combien peut on former d'anagrammes à partir du mot SANAA
3. Combien peut on former d'anagrammes à partir du mot AABBCCC

Solution

1. Un anagramme du mot MATH est un mot formé à 4 lettres formé par les 4 lettre du mot MATH
   Il y en a exactement 4 !
2. Un anagramme du mot MATH est un mot formé à 5 lettres formé par les lettres S, N, A,A,A : 5 !/ 3 !
3. Un anagramme du mot AABBCCC est un mot formé à 7 lettres formé par les lettres :7 !/ 3 !.2 !.3 !

Théorème 6 :
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ des ensembles finis. Alors

- $\prod_{1\leq i\leq n} A_i$ est fini
- $\mathrm{card}\left(\prod_{1\leq i\leq n} A_i\right) = \prod_{1\leq i\leq n} \mathrm{card}(A_i)$

Théorème 7 : Fondamentale
Soit A, B deux ensembles finis, et f : A → B.
On a les résultats suivants

- Si f injective, alors card(A) ≤ card(B)
- Si f surjective, alors card(A) ≥ card(B)
- Si f bijective, alors card(A) = card(B)

Demo : Admise

Théorème 8 : Trés Pratique
Soit A, B deux ensembles finis tq card(A)=card(B)
Soit $f : A \to B$.
On a le résultat suivant

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

Demo : Admise

Astuce 3 :
Si A, B deux ensembles finis. Si $f : A \to B$
Pour montrer que f est bijective il suffit de montrer

- f est injective (ou surjective)
- card(A)=card(B)

Astuce 4 :
Toute application injective d'un ensemble fini vers lui même est bijective

Extrait Concours : MP

Soit G un ensemble muni d'une LCI . associative et admet un élément neutre e

1. Montrer que tout élément $a \in G$ inversible est régulier
2. Montrer à l'aide d'une contre exemple que la réciproque est fausse
3. On suppose maintenant que G est fini, et on considère $a \in G$ est régulier
   1. Montrer que l'application $f : G \to G$ définie par $f(x)=a.x$ est bijective
   2. En déduire que a est inversible
   3. Conclure que (G,.) est un groupe

Solution

1. $a.x = a.y \Rightarrow a^{-1}.a.x = a^{-1}.a.y \Rightarrow x=y$
2. 2 est régulier dans IN, mais non inversible dans IN, car son inverse $1/2 \notin$ IN
3.
   1. Montrons que f est injective

   En effet $f(x)=f(y) \Rightarrow a.x=a.y \Rightarrow x=y$ (car régulier)

   Ainsi f est une application injective d'un ensemble fini vers lui même est bijective

   2. $e \in G$, et f est bijective, en particulier surjective

      Donc e admet un antécédent par f,

      Autrement dit $\exists x_1 \in G$ tq $f(x)=e$, cad $a.x_1=e$

      Donc a inversible à gauche

      On pose $g : G \to G$ définie par $f(x)=x.a$

      De même, on montre que g est bijective

      Donc a inversible à droite, $\exists x_2 \in G$ tq $f(x)=e$, cad $x_2 .a=e$

      Montrons que $x_2=x_2 . e= x_2 . e=x_2 . a.x_1=e.x_1=x_1$

2. Techniques de dénombrement

Situation 1 : Expérience successives
Ordre important dans le choix
On fait appel aux listes
1er cas : répétitions possibles (avec remise) :
on trouve des puissances
2ème cas :répétitions impossibles (sans remise) :
on trouve des arrangements

Situation 1 : Tirages simultanés (en même temps)
Ordre n'est important dans le choix
On fait appel aux aux combinaisons

Formules Clé

- C^k_n = Nbr de cas possibles de choisir simultanément k éléments parmi n
- A^k_n = Nbr de cas possibles de choisir successivement k éléments parmi n dans l'ordre sans répétitions et sans remise
- n^k = Nbr de cas possibles de choisir successivement k éléments parmi n dans l'ordre avec répétitions et avec remise

Formules à apprendre

$(n+1)! = n!\,(n+1)$

$C^k_n = n! / k!(n-k)!$

$k.C^k_n = n\ C^{k-1}_{n-1}$

$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}{}^n C^k_n\ a^k.b^{n-k}$ Formule du binôme de Newton

$(x+1)^n = \Sigma_{k=0}{}^n C^k_n\ x^k$ Formule du binôme de Newton (a=x, b=1)

$n(x+1)^{n-1} = \Sigma_{k=1}{}^n C^k_n\ kx^{k-1}$ (très utile pour calculer l'espérance E(X))

$n(n-1)(x+1)^{n-1} = \Sigma_{k=0}{}^n C^k_n\ k(k-1)x^{k-2}$ (très utile pour calculer la variance V(X))

Règle de base 1
Pour résoudre un problème de dénombrement, il faut
- **étape 1** : décider si y a l'ordre du choix est important ou non
- **étape 2** : utiliser les listes dans le cas échéant et les combinaisons dans le cas opposé

Règle de base 2
Lors de la résolution d'un problème de dénombrement,
- éviter de donner immédiatement un chiffre
- commencer plutôt par élaborer un raisonnement puis en déduire le nombre de cas possibles

Exercice 1 : Poker
Dans un jeu de 52 cartes (13 numéros, chacun répété 4 fois avec des symboles différentes), une main est formée par 5 cartes
1. Combien peut on envisager de mains possibles
2. Parmi ces mains possible combien y'en a de Quinte Flush Royal
   Quinte Flush Royal : 10, Valet, Dame, Roi, AS tous de la même symbole.
3. Parmi ces mains possible combien y'en a de Quinte Flush
   La quinte flush (straight flush) est formée de cinq cartes dont les rangs se suivent et dont les symboles sont identiques
4. Donner le nombre de cas possible pour les autres mains

Les combinaisons des mains de poker :

1. T♥ J♥ Q♥ K♥ A♥ La quinte flush royale
2. 8♥ 9♥ T♥ J♥ Q♥ La quinte flush
3. Q♥ Q♦ Q♠ Q♣ Le carré
4. Q♥ Q♦ Q♠ + 6♣ 6♥ Le full
5. Q♥ 4♥ 9♥ 2♥ 6♥ La couleur (flush)
6. 2♥ 3♦ 4♠ 5♣ 6♥ La suite (quinte)
7. Q♥ Q♦ Q♠ Le brelan
8. Q♥ Q♦ + 9♠ 9♣ La double paire
9. Q♥ Q♦ La paire
10. Q♥ La carte haute (isolée)

www.ludo9.com

Solution

1. Pour former une main à 5 cartes, il s'agit d'un tirage simultanée de 5 cartes parmi 52

   Nbr de cas possible = C_{52}^{5} =52 ! /(5 !47!)

   = (48.49.50.51.52)/120 = 2 598 960
2. Ici l'ordre est important, on représente une main sous forme d'une liste à 5 cases

   La quinte flush= cinq cartes dont les rangs se suivent et dont les couleurs sont identiques

   case 1 :

   case 2 : Roi de même couleur que l'As précédent (1 cas possibles)

   case 3 : Dame de même couleur que l'As précédent (1 cas possibles)

   case 4 : Vallet de même couleur que l'As précédent (1 cas possibles)

   case 5 : 10 de même couleur que l'As précédent (1 cas possibles)

   Total = 4.1.1.1.1=4 Quinte Flush Royal
3. Ici l'ordre est important, on représente une mains sous forme d'une liste à 5 cases

   case 1 : 13 cartes sauf 4 cartes A, Roi, Dame, Vallet, cad 9 cartes

   pour chacune de ses cartes on a 4 couleurs différentes

   Total = 9+9+9+9=36 (Ici il s'agit d'un « ou »)

   case 2 : carte suivante de même couleur que la carte précédente (1 cas possible)

   case 3 : carte suivante de même couleur que la carte précédente (1 cas possible)

   case 4 : carte suivante de même couleur que la carte précédente (1 cas possible)

   case 5 : carte suivante de même couleur que la carte précédente (1 cas possible)

   Total = 36 Quinte Flush
4. A faire

Exercice 2 : Tiercé
On mise sur 3 chevaux gagnants parmi 12

1. Combien peut en envisager de cas possibles
2. Combien de cas possibles si on mise sur 3 chevaux gagnants parmi 12, en précisant leur ordre

Solution

1. Ici l’ordre n’est pas important , donc c’est un choix simultanée de 3 parmi 12:
   Total = C_{12}^{3} =12 ! /9 !. 3!=220
2. Ici l’ordre n’est pas important , donc c’est un choix successives :
   il s’agit d’une liste à 3 cases
   case 1 : 12 cas
   case 2 : 11 cas
   case 3 : 10 cas
   Total = 12.11.10=1320

Astuce MP
Pour montrer qu'une relation de type A=B à l'aide d'un raisonnement de dénombrement

- **étape 1** : on imagine une situation
- **étape 2** : on dénombre les cas possibles de cette situation de deux méthodes différentes, de sorte que dans la 1ère méthode (respectivement la 2ème méthode) le nombre de cas possibles est A (respectivement B)
- **étape 3** : on conclut que A=B
  Indication : pour trouver la situation à dénombrer, on s'inspire de l'une des relations A ou B (surtout la plus simple)

Exercice 1 : Formule du binôme de Newton
Montrer que $\sum_{k=0}^{n} C^n_k=2^n$

Solution
On laisse une pièce de monnaie n fois et on compte le nbr de Pile
Ici l'ordre est important, il s'agit donc d'une liste à n cases

1ère méthode de dénombrement
case 1 : 2 cas, ….., case n : 2 cas
Total 1 $=2^n$

2ème méthode de dénombrement
On peut voir autrement la situation et dire que
ca peut être 0 pile parmi n : nbr cas possible : C^n_0
ca peut être 1 pile parmi n cas possible : C^n_1 cas
¦
ca peut être n piles parmi n cas possible : C^n_n cas
Total 2 = $C^n_0 + C^n_1 + \ldots + C^n_n$
Donc Total 1 = Total 2

Exercice 2 : Formule du binôme de Vandermonde (Extrait Centrale)

Montrer que $\sum_{p=0}^{k} C^{p}_{n}\, C^{k-p}_{m} = C^{k}_{n+m}$

Solution

On imagine une urne U_1 contenant n boules et autre urne U_1 contenant m boules, puis on choisit simultanément au total k boules parmi les deux urnes avec deux mains

1ère méthode de dénombrement :

Total 1 $= C^{k}_{n+m}$

2ère méthode de dénombrement : On peut voir autrement la situation

- On choisit dans U_1 0 boule parmi n et dans U_2 k boules parmi m : nbr cas possible : $C^{0}_{n} \,.\, C^{k}_{m}$
- On choisit dans U_1 1 boule parmi n et dans U_2 k-1 boules parmi m : nbr cas possible : $C^{1}_{n} \,.\, C^{k-1}_{m}$

⋮

- On choisit dans U_1 k boules parmi n et dans U_2 0 boules parmi m : nbr cas possible : $C^{k}_{n} \,.\, C^{0}_{m}$

Total 2 $= C^{0}_{n}.C^{k}_{m} + C^{1}_{n}.C^{k-1}_{m} + \ldots + C^{k}_{n}\,.C^{0}_{m} = \sum_{p=0}^{k} C^{p}_{n} C^{k-p}_{m}$

Donc Total 1 = Total 2 => le résultat