My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

MATH PrEPaS

Équations Différentielles

Le Cours
Les Astuces & Les Classiques
Les Annales

Objectifs

- Résoudre les équations différentielles linéaires
- Résoudre les systèmes différentielles linéaires
- Savoir étudier les équations différentielles non linéaires en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschistz

CNC	CCP	Mines	Centrales
2018, Math 1 2015, Math 1 2013, Math 1 **(Must To do)** 2007, Math 1 **(Must To do)**	2018, Math 2 2016, Math 1 2014, Math 1	2019, Math 2	2018, Math 2 2017, Math 1

1. Théorème de Cauchy-Lispchitz

Définition
Soit E un evn. Une équation différentielle dans E est une équation de type y'(x)=f(x,y(x)) où y : IR → E et f : IR x E → E

Exemples

- 2y'(x)+3y(x)=4, ici E=IR et y'(x)=(-3y(x)+4)/ 2, et f(x,y)=(-3y+4)/2
- 2xy'(x)+3y^2(x)=4, ici E=IR et y'(x)=(-3y^2(x)+4)/2x, et
  f(x,y)=(-3y^2+4)/2x
- 2xy''(x)+3cos(x)y'(x)-sin(x)y=4 =>
  y''(x)=(-3cos(x)y'(x)+sin(x)y+4) / 2x
  y'(x)=y'(x)
  Y(x)= [y(x)]
  [y'(x)]

Donc Y'(x)= [y'(x)] = [0.y(x) + 1.y'(x) +0]
[y''(x)] = [sin(x)/2x.y(x)-3cos(x)/2x.y'(x) +4/2x]

Donc Y'(X)=A(x)Y(x) + B(X)
A(x) = [0 1]
[sin(x)/2x -3cos(x)/2x]
B(x) =[0]
[4/2x]
Y'(X)=A(x)Y(x) + B(X) => Y'(X)=f(Y,x)

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ a(x)y'(x)+b(x)y(x)+c(x) \end{pmatrix}$$

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$$

Définition
Soit E un evn. Une équation différentielle de type $y'(x)=f(x,y(x))$ est dite linéaire ssi f est linéaire par rapport à la variable y

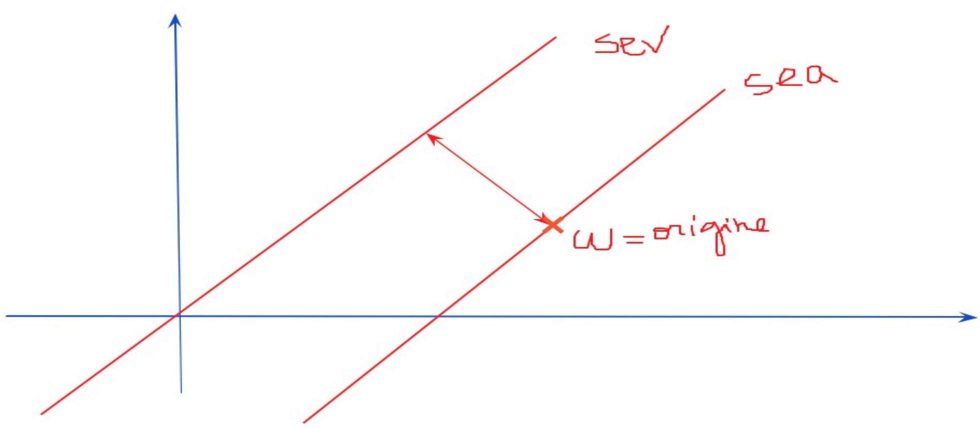
Astuce
Pour vérifier qu'une équation différentielle (E) est linéaire il suffit de
- considérer l'équation homogène associée (EH) (cad l'équation associée sans second membre)
- vérifier que y_1 et y_2 solution de EH, alors $\alpha y_1+\beta y_2$ aussi solution de EH

Théorème
si S désigne l'ensemble de solution de E
si S_H désigne l'ensemble de solution de EH, alors
- $S_H=\ker f$ est un sev
- S est un sous-espaces affine

Démo
y solution générale de E : $y'(x)=f(x,y)+b$
y_p solution générale de E : $y_P'(x)=f(x,y_P)+b$
$y'(x)-y_P'(x)=f(x,y)- f(x,y_P) = f(x,y -y_P)$ => $y -y_P$ solution de E
$y -y_P = y_H$ solution de EH => $y = y_P + y_H$

$$S=y_P + S_H$$

Rappel
Sous espace affine = origine + sev



Théorème de Cauchy-Lispchitz

Soit x_0 in IR et y_0 in E

Si f localement lipschitzienne par rapport à y en (x_0,y_0) alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

Admet une solution maximale unique

Définition

Si f localement lipschitzienne par rapport à y en (x_0,y_0) signifie que il existe un voisinage de (x_0,y_0) de la forme $K=]x_0-\varepsilon+ x_0+ \varepsilon[$ x $B(y_0,\delta)$ tq

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\| \leq k \|y_1-y_2\| \text{ qlq soit } (x,y_1), (x,y_2) \text{ in } K$$

Astuce

Si f continue par rapport à x

Si f est de classe C^1 par rapport à y

Alors f est localement lipschitzienne

Définition

Solution du problème de Cauchy est tout couple (I,y) où I intervalle contenante x_0 et y : I $\rightarrow$ E vérifiant $y'(x)=f(x,y(x))$ et $y(x_0)=y_0$

La solution (I,y) est dite maximale, quand on ne peut pas trouver un intervalle J plus grand que I tq y définie sur J et y vérifie $y'(x)=f(x,y(x))$ et $y(x_0)=y_0$

Définition

On appelle système fondamental d'une equa diff linéaire E toute famille finie $y_1, ...y_n$ de solutions de E_H qui forme une base de E_H

Dans ce cas : toute solution générale y_H de l'équation homogème EH va s'écrire

$$y_H(x)=\lambda_1 y_1 (x) + ...+ \lambda_n y_n (x)$$

Théorème de Lagrange : Formule de la variation des constantes

Si $y_1, ...y_n$ est un système fondamental d'une equa diff linéaire E

Alors toute solution particulier y_P de l'équation E va s'écrire

$$y_P(x)=\lambda_1(x)y_1 (x) + ...+ \lambda_n(x)y_n (x)$$

Astuce
Pour résoudre une équation différentielle linéaire

- étape 1 : trouver dimension de S_H,
- étape 2 : poser dim S_H=n et trouver une famille de n solutions particulières $y_1, \dots y_n$ de EH
- étape 3 : utiliser le wronskien de pour vérifier que la famille $y_1, \dots y_n$ est libre de cardinal =n=dim, donc base
- étape 4 : Conclure que $y_H(x)=\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x)$
- étape 5 : Conclure que $y_P(x)=\lambda_1(x)y_1(x) + \dots + \lambda_n(x)y_n(x)$
  On trouve les $\lambda_1(x)$ avec les formules de Lagrange obtenues en injectant la formule $y_P(x)=\lambda_1(x)y_1(x) + \dots + \lambda_n(x)y_n(x)$ dans E
- étape 6 : Conclure que $y(x)=y_P(x) + y_H(x)$

Définition
Si $y_1, \dots y_n$ est une famille de n solutions particulières de EH, son wronskien au point x_0 est le déterminant

$$w(x_0)=\det(y_1(x_0), \dots y_n(x_0))$$

NB : $(y_1(x_0), \dots y_n(x_0))$ est une matrice carrée de taille n où n=dim E_H

Théorème du Wronskien :
Soit $y_1, \dots y_n$ une famille de solution particulière d'une equa diff linéaire homogène EH. Alors

$$y_1, \dots y_n \text{ est libre} \iff \exists\, x_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } w(x_0) \neq 0$$

2. Équation différentielle d'ordre 1

Forme

a, b et c des fonctions continues de IR vers E par rapport à x

(E) : $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$

(EH) : $a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$

Théorème

Sur tout intervalle I où $a(x) \neq 0$

- dim $S_H=1$
- Système fondamental : $y_1(x)=e^{-\int b(t)/a(t)\, dt}$
- Solution générale de EH : $y_H(x)=\lambda_1 y_1(x)$
- Solution particulière de E : $y_P(x)=\lambda_1(x)y1(x)$ tq

  $\lambda_1'(x) = c(x)/a(x)y_1(x)$
- Solution générale de E : $y(x)=y_H(x) + y_P(x)$

Démo

(E) : $y'(x)=-b(x)/a(x)y(x)+c(x)/a(x)=f(x,y)+c(x)/a(x)$ où $f(x,y)=-b(x)/a(x).y(x)$

EH : $y'(x)=-b(x)/a(x)y(x)$

Posons φ : EH $\rightarrow$ IR tq $\varphi(y)=y(x_0)$

φ linéaire car $\varphi(\alpha y_1+\beta y_2)=(\alpha y_1+\beta y_2)(x_0)=\alpha y_1(x_0)+\beta y_2(x_0)=\alpha\, \varphi\, (y_1)+\beta\varphi\, (y_2)$

D'autre part $\varphi \in$ EH <=> $y'=f(x,y)$ où $f(x,y)=-b(x)/a(x).y(x)$ est continue par rapport à x car a, b et c continues par rapport à x et $a(x) \neq 0$

$f(x,y)=-b(x)/a(x).y(x)=K.y$ est de classe C^1 par rapport à y

Selon Thm de Cauchy-Lipschitz, $\forall\, y_0 \in$ IR il existe une seule solution y de $y'(x)=f(x,y(x))$ et $y(x_0)=y_0$.

Or $y'(x)=f(x,y(x))$ <=> y in SH et $y(x_0)=y_{0<}$<=> $\varphi(y)=y_0$

Autrement dit : $\forall\, y_0 \in$ IR, $\exists\, !\, y \in$ SH tq $\varphi(y)=y_0$

Donc φ bijective de SH vers IR, en particulier dim SH =dim IR=1

Ainsi le système fondamental sera$\{y_1\}$ où y_1 solution particulière de SH tq $\exists\, x_0 \in$ IR tq $w(x_0) \neq 0$

Ici EH : $y'(x)=-b(x)/a(x)y(x)$ => $y'(t) / y(t) =-b(t)/a(t)$=>$\ln y =-\int b(t)/a(t)\, dt$

=> $y_1(x)=e^{-\int b(t)/a(t)\, dt}$

D'autre part : Ici $\det(y_1(x_0))= y_1(x_0) \neq 0$, donc il s'agit bien d'un système fondamental

2. Équation différentielle d'ordre 2

Forme

a, b et c des fonctions continues de IR vers E par rapport à x

(E) : $a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)\ y(x)=d(x)$

(EH) : $a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)\ y(x)=0$

Théorème 1

Sur tout intervalle I où $a(x) \neq 0$

- dim $S_H=2$
- Système fondamental : $\{y_1,y_2\}$
- Solution générale de EH : $y_H(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_2 y_2(x)$
- Solution particulière de E : $y_P(x)=\lambda_1(x)y_1(x) +\lambda_2(x)y_2(x)$

tq $\lambda_1'(x)y_1(x) +\lambda_2'(x)y_2(x)=0$

$\lambda_1'(x)y_1'(x) +\lambda_2'y_2'(x)=d(x) / a(x)$

- Solution générale de E : $y(x)=y_H(x) + y_P(x)$

Démo

(EH) : $y''(x)=[-b(x)/a(x)]y'(x)-[c(x)/a(x)]y(x)$

On pose $Y(x)=\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}$, donc $Y'(x)=A(x)Y(x)$ (déjà vu)

$$A(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c(x)/a(x) & -b(x)/a(x) \end{bmatrix}$$

Ainsi (EH) <=> (EH') : $Y'(x)=A(x)Y(x)$

Le problème de Cauchy $Y'(x)=A(x).Y(x)$

$Y(x_0)=Y_0=(y_1,y_2)$ cad $y(x)= y_1$ et $y'(x)= y_2$

admet une solution unique car la fct $f(x,Y)=A(x)Y(x)$ est continue par rapport à x et de classe C^1 par rapport a Y

Comme précédemment, $\varphi : SH \rightarrow IR^2$ définie par $\varphi(Y)=Y_0$ est bijective de SH vers IR^2, en particulier dim SH =dim $IR^2=2$

Solution particulière de E : $y_P(x)=\lambda_1(x)y_1(x) +\lambda_2(x)y_2(x)$, donc

E <=> E' : $Y'(x)=A(x)Y(x) +B(x)$ tq $B(x)=\begin{bmatrix} 0 \\ d(x)/a(x) \end{bmatrix}$

le système fondamental de EH' est $Y_1=\begin{bmatrix} y_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$ et $Y_2=\begin{bmatrix} y_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$

Une solution particulière de E' est $Y_P(x)=\lambda_1(x)Y_1(x) +\lambda_2(x)Y_2(x)$

$Y_p' = AY_p + B$, $Y_p = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$

$Y_p' = \lambda_1 Y_1' + \lambda_2 Y_2' + \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2$

$AY_p + B = \lambda_1 A Y_1 + \lambda_2 A Y_2 + B$

$Y_1' = AY_1$, $Y_2' = AY_2$

$$Y_p' = AY_p + B \Rightarrow \lambda_1' Y_1 + \lambda_2' Y_2 = B \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \frac{d}{c} \end{cases}$$

Théorème 2 : cas de coefficients constants

Si (E) : $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=d(x)$, dim $S_H=2$

On considère l'équation caractéristique : (*) $ar^2+br+c=0$ et $\Delta=b^2-4ac$

- $\Delta \neq 0$: Système fondamental : $\{y_1(x)=e^{r1.x}, y_2(x)=e^{r2.x}\}$ où r_1 et r_2 solutions de (*)
- $\Delta = 0$: Système fondamental : $\{y_1(x)=e^{r.x}, y_2(x)=x.e^{r.x}\}$ où r solution double de (*)

Demo

étape 1 :

vérifier que r solution simple de (*) alors $y(x)= e^{r.X}$ solution de (EH)

$y'(x)= re^{r.x}$, $y''(x)= r^2e^{r.x}$. $ay''(x)+by'(x)+cy(x)=(ar^2+br+c)e^{r.x}=0$

vérifier que r solution double de (*) alors $x.e^{r.X}$ solution de (EH)

étape 2 :

vérifier que le wronskien $w(x)=\det(Y_1, Y_2) \neq 0$

En effet $\det(Y_1, Y_2) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \neq 0$

pour x=0, et $\{y_1(x)=e^{r1.x}, y_2(x)=e^{r2.X}\}$

$w(0)=\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} = r_2-r_1 \neq 0$

Théorème 2 : cas général (Classique CNC)

- on cherche $y_1(x)$ sous la forme $y_1(x) = \sum a_n x^n$ série entière solution de EH
- on cherche $y_2(x)$ sous la forme $y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$
- on trouver $\lambda(x)$ en injectant l'expression $y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$ dans EH

$$y_2 = \lambda y_1 \quad , \quad y_2' = \lambda y_1' + \lambda' y_1$$

$$y_2'' = \lambda y_1'' + 2\lambda' y_1' + \lambda'' y_1$$

$$a y_2' + b y_2' + c y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + \overbrace{\boxed{(2a y_1' + b y_1)\lambda' + a y_1 \lambda'' = 0}}^{=0}$$

Astuce 1

Pour trouver $y_1(x)$ sous la forme $y_1(x) = \sum a_n x^n$ série entière solution de EH

- on injecte sur relation dans EH
- on effectue un changement d'indice pour ramener toutes les puissance à une même puissance
- par identification on trouve une relation entre les a_n, a_{n+1} et parfois a_{n+2}
- on en déduit a_n en fonction de n, puis $y_1(x)$ en fonction de x

Astuce 2

pour trouver $y_2(x)$ sous la forme $y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$

- on injecte l'expression $y_2(x) = \lambda(x)y_1(x)$ dans EH
- on trouve la relation $(2ay_1'+by_1)\lambda'+ay_1\lambda''=0$
- il s'agit d'une eq diff d'ordre 1, d'inconnue λ'

3. Système différentiel à coefficient cte

Forme générale

- (E) : $Y'(x)=A(x)Y(x)+B(x)$
- (EH) : $Y'(x)=A(x)Y(x)$
- $x \in$ IR, $Y(x) \in$ IR^n (colonne), $B(x) \in$ IR^n et $A(x) \in M_n(IR)$

Théorème 1

dim SH=n

Demo

φ : SH $\rightarrow$ IR^n tq $\varphi(Y)=Y(x_0)$ est bijective

Théorème 2 : Cas ou $A(x)=A$ (ne dépend de x)
$Y'(x)=A.Y(x) \iff Y(x)=e^{xA}.\ Y(0)$

Demo

NB : $(e^{tA})'=A.\ e^{tA}= e^{tA}.\ A$
$(e^{-xA}.Y(x))'= -e^{-xA}.A.\ Y(x)+ e^{-xA}.Y'(x)=-e^{-xA}.A.\ Y(x)+ e^{-xA}.AY(x)=0$
$e^{-xA}.Y(x)=cte=Y(0) \Rightarrow Y(x)=e^{xA}.\ Y(0)$

Astuce 1

$Y=AX \iff Y=\lambda_1C_1+ \ldots + \lambda_nC_n$ ou C_k sont les colonnes de A
Autrement dit $Y=AX \iff Y$ combinaison linéaires des colonnes de A
où les λ_k sont les coefficients de la colonne X

$$Y = AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff Y = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots \quad a_{2n} x_n \\ a_{n1} x_1 + \cdots \quad + a_{nn} x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$$

Théorème 3 : Cas ou $A(x)=A$ (ne dépend de x)

- Système fondamental $\{Y_1, \ldots., Y_n\}$ les colonnes de e^{xA}
- Solution générale de EH : $Y_H(x) = \lambda_1 Y_1(x) + \ldots.+\lambda_n Y_n(x)$
- Solution particulière de E : $Y_P(x) = \lambda_1(x)Y_1(x) + \ldots.+\lambda_n (x)Y_n(x)$

Demo

$Y \in$ SH $\Rightarrow Y(x)=e^{xA}. Y(0)$

=> Y(x) combinaison linéaire des n colonnes de e^{xA}

=> n colonnes de e^{xA} forment une famille génératrice de SH, de cardinal=n=dim SH

=> les n colonnes de e^{xA} forment une base de SH

=> les n colonnes de e^{xA} système fondamental de SH

Astuce 2

On trouve les $\lambda_k(x)$ avec la formule $e^{xA}.Z'(x)= B(x)$ où les coefficient de $Z(x)$ sont $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n (x)$

Demo

$\{Y_1, \ldots., Y_n\}$ les colonnes de e^{xA}

$Y_P(x) = \lambda_1(x)Y_1(x) + \ldots.+\lambda_n (x)Y_n(x) \Leftrightarrow Y_P(x) = e^{xA}.Z$ où les coefficient de Z sont $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n (x)$

$(Y_P(x))' = (e^{xA}.Z)' \Rightarrow A\, Y_P + B = A.e^{xA}.Z + e^{xA}.Z' \Rightarrow e^{xA}.Z' = B$

Astuce 3

Pour calculer $e^A = \Sigma n=0\ \infty\ A^n/ n\,!$

- Cas 1 : A nilpotente, la somme devient une somme finie
- Cas 2 : $A=diag(a,b,\ldots.)$, alors $e^A = diag(e^a, e^b, \ldots,)$
- Cas 3 : A diagonalisable, $A=PDP^{-1}$, alors $e^A = Pe^DP^{-1}$
  car $A^n=(PDP^{-1})^n= PD^nP^{-1}$
- Cas 4 : cas gle, on utilise la décomposition de Dunford, $A=D+N$ tq D diagonalisable, N nilpotente avec $DN=ND$, dans ce cas $e^A=e^{D+N}=e^D.e^N$

Astuce 4

Quand $A=PDP^{-1}$ est diagonalisable, alors

- $Y'(x)=AY(x) \Leftrightarrow Y'=PDP^{-1}Y \Leftrightarrow P^{-1}Y'=DP^{-1}Y \Leftrightarrow Z'=DZ$ où $Z=P^{-1}Y$
- $Z(x)=e^{xD}.Z(0)$
- $X=PY$

4. Équations différentielles à coefficient cte

Forme :

$$(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$$

Théorème 1

- $(E) \Leftrightarrow (E') : Y'(x) = A.Y(x) + B(x)$
- dim SH=n
- Système fondamental : les colonnes de e^{xA}

Demo

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow Y'(x) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \\ -\frac{a_0}{a_n} y - \frac{a_1}{a_n} y' - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \frac{b}{a_n} \end{pmatrix}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & & & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b/a_n \end{pmatrix}$$

matrice compagnon

Astuce

Pour résoudre $(E) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(x)$

- on pose $Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$
- on résout $Y'(x) = A.\ Y(x) + B(x)$ (voir image ci dessous)
- on en déduit Y(x), puis y(x)

Classique Concours (CNC 2013)

Pour résoudre (E) : $a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots.+a_0 y=b(x)$,

- on considère le polynôme caractéristique $P(x)= a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+a_0$
- on cherche ses racines r_k et leur multiplicités α_k
- on montrer que systèmes fondamental est $(x^j e^{r_k.\,x})$ tq $j\leq\alpha_k$

Exemple

- (E) $y^{(3)}+y^{(2)}-y'-y=0$
- $P(x)=x^3+x^2-x-1=(x-1)^2(x+1)$
- racines : 1 de multiplicité 2 et -1 de multiplicité 1
- système fondamental : e^x, xe^x, e^{-x}

Classique Concours (CNC 2013)

Pour résoudre (E) : $a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots.+a_0 y=b(x)$,

- on considère le polynôme caractéristique $P(x)= a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+a_0$
- on cherche ses racines r_k et leur multiplicités α_k
- Si les racines sont toutes simples, alors
- on montrer que systèmes fondamental est $(e^{r_k.\,x})$

Exemple

- (E) $y^{(4)}-y=0$
- $P(x)=x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$
- racines simples : 1,-1, i et -i
- système fondamental : e^x, e^{-x}, e^{ix}, e^{-ix}

5. Système différentiel à coefficient cte

Forme génerale

- (E) : $Y'(x)=A(x)Y(x)+B(x)$
- (EH) : $Y'(x)=A(x)Y(x)$
- $x \in \mathbb{R}$, $Y(x) \in \mathbb{R}^n$ (colonne), $B(x) \in \mathbb{R}^n$ et $A(x) \in M_n(\mathbb{R})$

Théorème 1

dim SH=n

Théorème 2 : Formules de Liouville-Duhamel

On prend $F(x) = \int A(t)dt$ une primitive de la matrice A(t), dans ce cas

- $Y_H(x)=e^{F(x)}.Y(0)$
- Système fondamental $\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ les colonnes de $e^{F(x)}$
- Solution générale de EH : $Y_H(x) = \lambda_1 Y_1(x)+ \ldots + \lambda_n Y_n(x)$
- Solution particulière de E : $Y_P(x) = \lambda_1(x)Y_1(x)+ \ldots + \lambda_n(x)Y_n(x)$
- On trouve les $\lambda_k(x)$ avec la formule $e^{xA}.Z'(x)= B(x)$ où les coefficient de Z(x) sont $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$

Astuce 1

l'intégrale d'une matrice est la matrice formée par les intégrales de ces coefficients

Autrement dit $\int A(t)dt = \int (a_{ij}(t))_{ij}dt = (\int a_{ij}(t)dt)_{ij}$

Astuce 2

si A(x)=A ne dépend pas de x, alors sa primitive est F(x)=x.A

Ce qui justifie ce qui a été déjà fait

Astuce 3

si A(x) dépend pas de x est diagonalisable, $A(x)=P.D(x)P^{-1}$ avec P=cte ne dépend de x

- $Y'(x)=A(x)Y(x) \Leftrightarrow Y'(x)=PD(x)P^{-1}Y \Leftrightarrow P^{-1}Y'=D(x)P^{-1}Y$
  $\Leftrightarrow (P^{-1}Y)'=D(x)(P^{-1}Y) \Leftrightarrow Z'(x)=D(x)Z(x)$ où $Z(x)= P^{-1}Y(x)$
- $Z(x)=e^{F(x)}.Z(0)$ où F(x)= primitive de D(x) facile à calculer
- $Y(x)=PZ(x)$

6. Équations différentielles à coefficient qlq

Forme :

$$(E) : a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots.+a_0(x)y=b(x)$$

Théorème 1

- (E) <=> (E') : $Y'(x)=A(x).Y(x)+B(x)$
- dim SH=n
- Système fondamental: les colonnes de $e^{F(x)}$ où F(x) primitive de A(x)

7. Équations différentielles non linéaires

Détails sur Fiche de cours et faire des exercices du 100 % Classique