PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
Prépas MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مَمُّونِي مُولَايِ اسْمَاعِيل

Familles Sommables

Fiche de Cours

1) Ensembles dénombrables

Un ensemble non vide est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie non vide de $\mathbb{N}$.
Ou encore, E est au plus dénombrable si et seulement si il existe un injection de E dans $\mathbb{N}$, ou encore si et seulement si il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E.

Tout sous ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Proposition III - 1 : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Proposition III - 2 : Produit cartésien fini d'ensembles dénombrables
Le produit cartésien fini d'ensembles dénombrable est dénombrable.

Proposition III - 3 : Réunion
Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Proposition III - 4 : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Proposition III - 5 : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$
L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Corollaire III - 2 : $\mathbb{R}$
l'ensemble $[0,1]$ n'est pas dénombrable et par suite $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2) Familles sommables

Définition III - 3 : Sommabilité dans le cas positif

On considère une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs, indexée par I ensemble dénombrable.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} u_i$ où J décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$.
Dans tous les cas, la somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.

Proposition III - 6 : Comparaison

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par le même ensemble I dénombrable. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\forall i \in I\ u_i \leqslant \lambda v_i$. Si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i\in I}$ aussi et de plus $\sum_{i\in I} u_i \leqslant \lambda \sum_{i\in I} v_i$.

Proposition III - 7 : Somme et produit par un scalaire positif

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par le même ensemble I dénombrable. Si ces deux familles sont sommables alors la famille $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est aussi sommable. De plus on a $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
Si λ est un réel positif et si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est aussi sommable et de plus $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème III - 1 : Sommation par paquets

si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

a) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est finie ou sommable.

b) La série $\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

Définition III - 4 : Famille sommable de complexes

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble dénombrable I. On dit que cette famille est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Proposition III - 8 :

a) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Pour tout $i\in I$ on pose $u_i^+=\max\{u_i,0\}$ et $u_i^-=\max\{-u_i,0\}$. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ le sont.

b) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes, cette famille est sommable si et seulement si les familles $(\Re(u_i))_{i\in I}$ et $(\Im(u_i))_{i\in I}$ le sont.

On en déduit la définition cohérente des sommes :

Définition III - 5 : Sommes

a) Si la famille de réels $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_i^+-\sum_{i\in I}u_i^-$.

b) Si la suite de complexes $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}\Re(u_i)+i\sum_{i\in I}\Im(u_i)$.

Propriété III - 3 : Espaces des familles sommables

L'ensemble des familles indexées par un ensemble I dénombrable et qui sont sommables, est un espace vectoriel noté $\ell^1(I)$.

De plus l'application qui à une famille associe sa somme est linéaire.

Démonstration : On utilise la décomposition qui définie la somme et on utilise la proposition 7. ■

Proposition III - 9 : Inégalité triangulaire

Dans le cas d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ on a

$$\left|\sum_{i\in I}u_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$$

Proposition III - 10 : Dirichlet : cas où $I=\mathbb{N}$

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors est commutativement convergente. C'est-à-dire que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et sa somme est indépendante de σ/

Corollaire III - 3 :

Une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ est sommable si et seulement si sa série est absolument convergente. De plus la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Théorème III - 2 : Sommation par paquets

si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable alors :

a) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est finie ou sommable.

b) La série $\displaystyle\sum_n\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$ converge absolument.

On a de plus :

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$$

3) Séries doubles

C'est une application de la sommation par paquets.

Théorème III - 3 : Tonelli discret

La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si :

a) pour tout n, la série $\displaystyle\sum_m u_{m,n}$ converge

b) la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$ converge.

Si tel est le cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

Théorème III - 4 : Fubini discret

Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}\right)$$

Théorème III - 5 : Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ l'est aussi.

De plus dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.