Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Séries Doubles

Fiche de Cours

I PRODUIT DE CAUCHY

1 Série produit de Cauchy

Définition 1 Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n.
On appelle série produit ou produit de Cauchy la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{i+j=n} u_i v_j$$

Théorème 1 Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n positifs.
Si les deux séries sont convergentes alors la série produit est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)$$

Théorème 2 Soient deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n quelconques
Si les deux séries sont absolument convergentes alors la série produit est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n)$$

Application

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{C})^2, \quad e^{a+b} = e^a.e^b$$

II SUITES SOMMABLES

Théorème 3 Fubini
Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

Hypothèses
(1) $\forall q \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{p,q}$ d'indice p est convergente. On note $v_q = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$.
(2) La série de terme général v_q est convergente.

Conclusions
On a alors
$\forall p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{p,q}$ d'indice q est convergente. Si on note $w_p = \sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$, la série de terme général w_p est convergente et:

$$\sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$$

On dit que la série double de terme général est sommable et on note aussi

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$$

Théorème 4 Fubini
Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou complexes.

Hypothèses
(1) $\forall q \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{p,q}$ d'indice p est absolument convergente On note $v_q = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$.
(2) La série de terme général v_q est convergente.

Conclusions
On a alors
$\forall p \in \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{p,q}$ d'indice q est absolument convergente . Si on note $w_p = \sum\limits_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$, la série de terme général w_p est convergente et:

$$\sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$$

On dit que la série double de terme général est sommable et on note aussi

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})$$