My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

ممُوني مُولَاي اسمَاعِيل

Intégration 1
Intégration sur un Segment
MP

Le Cours Complet

Nature= chapitre de Calcul
Difficulté= **
Importance=***

Objectifs

1. Calcul exact d'intégrales : primitives usuels, chgt variable ou IPP
2. Sommes de Riemann

1. Fonction en escaliers

Définition 1
On appelle subdivision de [a,b] tout suite $x_0=a<x_1<...<x_n=b$

Exemples

- Subdivision de [0,1] : {0, 1/2, 1}
- Subdivision de [0,1] : {0, 1/4, 1/3,1/2, 1}

Définition 2
Soit une subdivision de [a,b] tout suite $x_0=a<x_1<...<x_n=b$
les différences x_k-x_{k-1} s'appellent les pas de la subdivision

Exemples

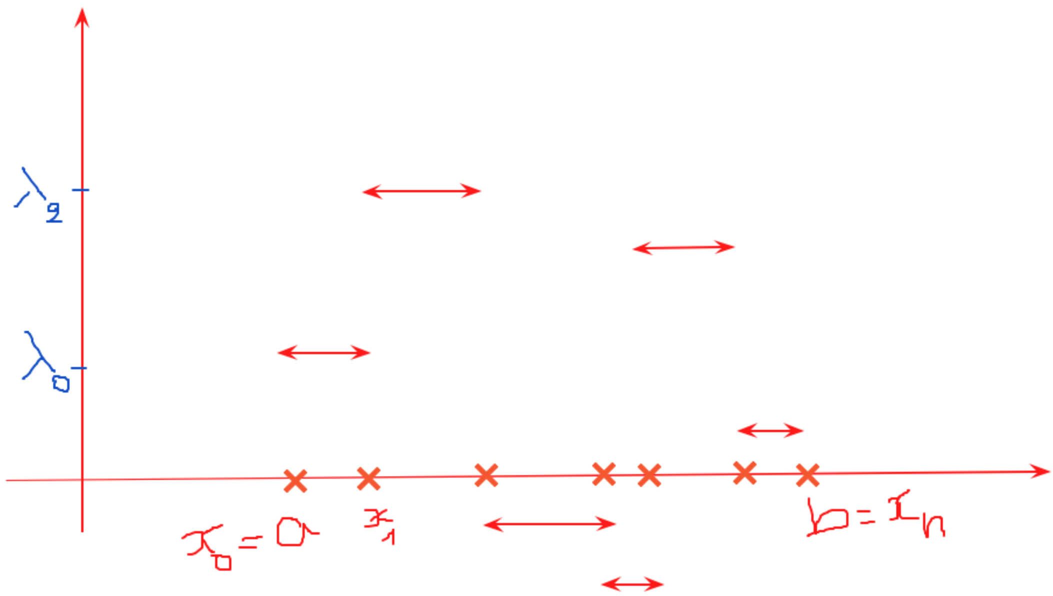
- Subdivision de [0,1] : {0, 1/2, 1}, les pas : 1/2 et 1/2
- Subdivision de [0,1] : {0, 1/4, 1/3,1/2, 1}, les 1/4, 1/3-1/4=1/12, 1/2-1/3=1/6 et 1-1/2=1/2

Définition 3
Soit la subdivision de [a,b] définie par $x_k=a+k(b-a)/n$
Il s'agit d'une subdivision à pas cte $x_k-x_{k-1} = (b-a)/n$
On l'appelle subdivision uniforme

Exemples

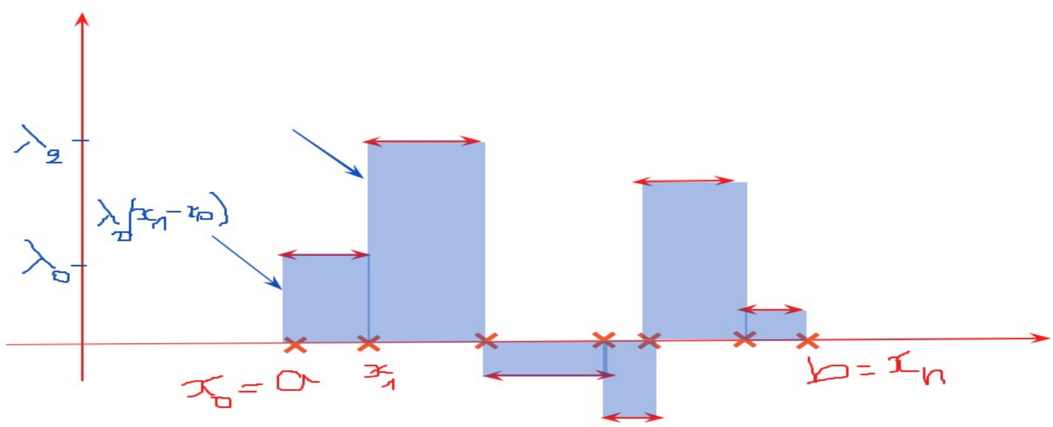
- Subdivision de [0,1] : {0, 1/2, 1}, à pas cte = 1/2
- Subdivision de [0,1] : {0, 1/4, 1/2, 3/4, 1} à pas cte = 1/4

Définition 4
On appelle fonction en escalier sur [a,b] toute fonction φ cte par morceaux
Plus précisément : elle existe une subdivision de [a,b] $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ tq $\varphi = \lambda_k$ sur $]\, x_k, x_{k+1}\, [$



Définition 4
Soit φ une fonction en escalier sur [a,b] et $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$ une subdivision adaptée (associée).
L'intégrale de φ sur [a,b] est définie par la formule suivante

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (x_{k+1} - x_k)$$



Théorème 2: Formules Utiles
Soient φ et Ψ deux fonctions en escalier sur [a,b], on a les résultats suivants

- $\varphi \geq 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi(t)dt \geq 0$
- $\int_a^b (\varphi(t)+\Psi(t))dt = \int_a^b \varphi(t)dt + \int_a^b \Psi(t)dt$
- $\varphi \geq \Psi \Rightarrow \int_a^b \varphi(t)dt \geq \int_a^b \Psi(t)dt$
- $\int_a^c \varphi(t)dt + \int_c^b \varphi(t)dt = \int_a^b \varphi(t)dt$
- $\int_b^a \varphi(t)dt = -\int_a^b \varphi(t)dt$

Théorème 3: Inégalité de la moyenne
Soient φ une fonction en escalier sur [a,b], on a le résultats suivant

$$\left|\int_b^a \varphi(t)dt\right| \leq \int_b^a |\varphi(t)|dt$$

Demo

Découle de $|\Sigma\ldots| \leq \Sigma\,|\ldots|$

2. Fonction continues par morceaux

Définition 1
On appelle fonction continue par morceaux, tout fonction f : [a,b] → IR ou C pour laquelle elle existe une subdivision $x_0=a<x_1<...<x_n=b$ telle que

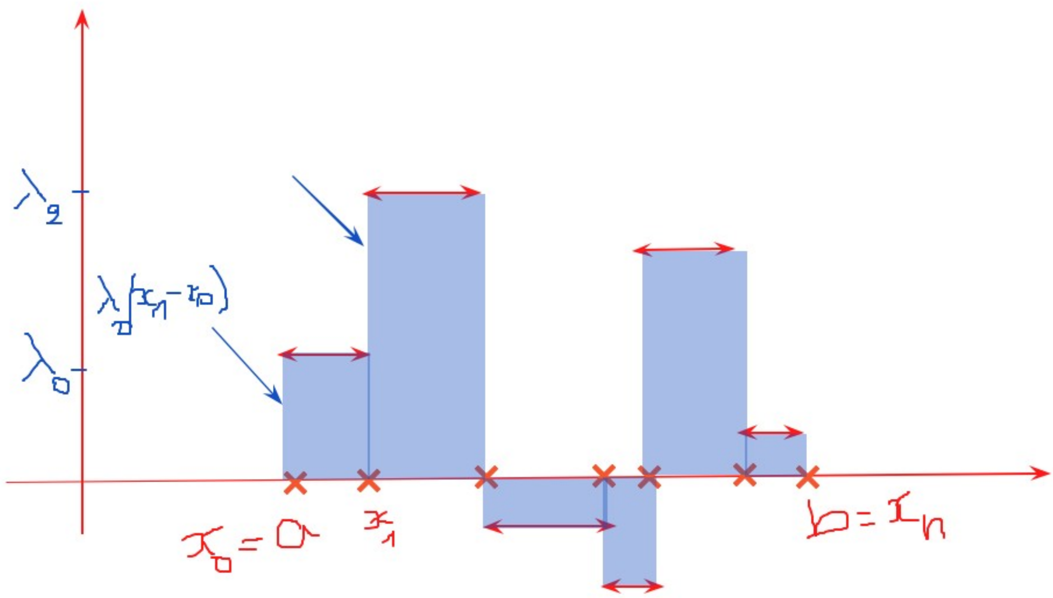
- f continue sur chaque intervalle $]x_k,x_{k+1}[$
- lim f en x_k et x_{k+1} sont finies

Théorème 1: Thm d'approximation des fcts cont par morceaux des fcts en escalier
Pour toute fonction continue f : [a,b] → IR ou C, elle existe une suite φ_n : [a,b] → IR de fonctions en escalier sur [a,b] telle que

$$\|\varphi_n - f\|_\infty = \sup |\varphi_n(x) - f(x)| \to 0$$

On dit alors que φ_n converge uniformément vers f et on écrit f=lim φ_n

Demo : Admise



Définition 2

Soit f : [a,b] → IR ou C une fonction continue par morceaux

On pose $\int_a^b f(t)dt = \lim \int_a^b \varphi_n(t)dt$

Rappel 1:

F primitive de f <=> F'= f <=> $F(x)=\int f(t)\,dt + Cte$

Rappel 2

Si F primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$

Rappel 3

$$\int_a^b (f(t)+g(t))dt=\int_a^b f(t)dt +\int_a^b g(t)dt=$$

Rappel 4: Relation de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Rappel 5 :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

3. Primitive élémentaires

Fonction	Primitive
$f(x)= 1/(ax+b)$	$F(x)= 1/a. \ln \mid ax+b \mid +cte$
$f(x)=e^{ax+b}$	$F(x) =1/a\ e^{ax+b} +cte$
$f(x)= 1/ (1+x^2)$	$F(x)= \arctan x +Cte$
$f(x)= 1/ (a^2+x^2)$	$F(x) = 1/a. \arctan x/a +Cte$
$f(x)= \sin (ax+b)$	$F(x) = -1/a. \cos(ax+b) +Cte$
$f(x)= \cos (ax+b)$	$F(x) = 1/a. \sin(ax+b) +Cte$

Exemple 1

$f(x) = 1/ (x^2-3x+2)$, donner $F(x)$

$\Delta=1$, $x_1=1$, $x_2=2$, donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

donc $f(x)=1/ (x^2-3x+2) = 1/(x-1)(x-2) = a/(x-1) + b/ (x-2)$ $(a=-1, b=1)$

car $a/(x-1) + b/ (x-2) = (ax-2a+bx-b)/ (x-1)(x-2) = [(a+b)x -2a-b] / (x^2-3x+2)$

par identification : $a+b=0$ et $-2a-b = 1$, donc $a=-1$, $b=1$

$F(x) = \int 1/ (x^2-3x+2) +cte = \int a/(x-1) + b/ (x-2) +cte$

$=a\int 1/(x-1) + b\int 1\ (x-2) +cte$

Exemple 2

$f(x) = 2e^{-2x+3}$, donner $F(x)=-e^{-2x+3}$

Exemple 3

$f(x) = 1/(x^2+4)=1/(x^2+2^2)$, donc $F(x)=1/2 \arctan x/2 +Cte$

$f(x) = 1/(x^2+3)=1/(x^2+(\text{sqrt } 3)^2)$, donc $F(x)=1/(\text{sqrt } 3) \arctan x/(\text{sqrt } 3) +Cte$

4. Primitive composées

Fonction	**Primitive**
$f(x)= u'/u$	$F(x)= \ln \|u\|+cte$
$f(x)=u'.e^{u}$	$F(x) =1/a\ e^{ax+b} +cte$
$f(x)= u'/ (1+u^2)$	$F(x)= \arctan u +Cte$
$f(x)= u'.\ u^n$	$F(x) = u^{n+1} / (n+1) +Cte$
$f(x)= u'.\ \sin (u)$	$F(x) = -\cos(u) +Cte$
$f(x)= u'.\cos (u)$	$F(x) = \sin(u) +Cte$

Exemples

- $f(x)=xe^{x°2}$, posons $u=x°2$, $u'=2x$, donc $f(x)=1/2.\ u'e^u$,

donc $F(x)=1/2e^u+cte= 1/2e^{x°2}+cte$

- $f(x)=xe^{-x°2/2}$, posons $u=-(x°2)/2$, $u'=-2x/2=-x$, donc $f(x)=-u'e^u$,

donc $F(x)=-e^u+cte= -e^{x°2 / 2}+cte$

Astuce Concours 1
Pour intégrer une fraction rationnelle, on utilise l'une méthodes suivantes
- **Méthode 1** : On ajoute et on retranche
- **Méthode 2** : On décompose la fraction $1/(x-a)(x-b)=\alpha/(x-a) +\beta/(x-b)$

Exemples

- $f(x)=x^2 / 1+x^2 = (x^2 +1-1)/ (1+x^2)= (x^2 +1)/ (1+x^2) -1/ (1+x^2)$

donc $f(x)=1-1/(1+x^2)$, donc $F(x)=x-\arctan x + cte$

- $f(x)= 2x / (x^2-3x+2)$, $\Delta=1$, $x_1=1$ et $x_2=2$, donc $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,
  donc $f(x)=2x / (x-1)(x-2) =\alpha/(x-1) +\beta/(x-2)$

donc, $2x / (x-1)(x-2)=[\alpha(x-2)+\beta(x-1)] / (x-1)(x-2)$
donc $2x / (x-1)(x-2)=(\alpha+\beta)x+(-2\alpha-\beta) / (x-1)(x-2)$
donc $2x=(\alpha+\beta)x+(-2\alpha-\beta)$, d'où le système (1) : $\alpha+\beta=2$ et (2) : $-2\alpha-\beta =0$
(1) + (2) => $-\alpha=2$ => $\alpha=-2$ et $\beta=2- \alpha=4$
Ainsi $f(x)=-2/(x-1) +4/(x-2)$ et $F(x)=-2.\ \ln |x-1| + 4.\ \ln |x-2| + cte$

Théorème 3 (très pratique) : Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b | f(t) |\, dt$$

Astuce Concours 2

Pour encadrer une intégrale, on encadre l'expression à l'intérieur de l'intégrale :

- Si cette expression est un produit, on majore l'un de ses termes sans majorer l'autre
- le point de départ est $a \leq t \leq b$

Théorème 4 (très pratique) : Inégalité de Cauchy-Scwharz

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\, dt \right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2\, dt\right)^{1/2} . \left(\int_a^b g(t)^2\, dt\right)^{1/2}$$

Extrait classique concours

On pose $I_n = \int_0^1 t^n / (1+t^2)\, dt$

1. Vérifier que $I_n \geq 0$
2. Montrer $1/ 2(n+1) \leq I_n \leq 1/(n+1)$
3. En déduire que $\lim I_n = 0$

Solution

1. $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t^n/(1+t^2) \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$
2. $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t^2 \leq 2 \Rightarrow 1/2 \leq \mathbf{1/(}1+t^2) \leq 1 \Rightarrow t^n/2 \leq t^n/(1+t^2) \leq t^n$

$\Rightarrow \int_0^1 t^n/2\, dt \leq \int_0^1 \mathbf{1/(}1+t^2)dt \leq \int_0^1 t^n\, dt$

$\Rightarrow [t^{n+1} / 2(n+1)]_0^1 \leq \mathbf{I_n} \leq [t^{n+1} / (n+1)]_0^1 \Rightarrow 1/2(n+1) \leq \mathbf{I_n} \leq 1/(n+1)$

3. $\lim 1/ 2(n+1) = \lim 1/(n+1)$, or $1/2(n+1) \leq \mathbf{I_n} \leq 1/(n+1)$.

D'après le théorème des encadrements, on a lim $\mathbf{I_n = 0}$

5. Changement de variable

Théorème :

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du$$

6. Intégration par partie (IPP)

Théorème :

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

Astuce 5

Pour calculer l'intégrale d'un produit,

- l'une es expression va jouer le rôle de u'
- on choisit u' l'expression dont on connaît la primitive
- la priorité u' est selon l'ordre inverse de ALPES
- la priorité v est selon l'ordre de ALPES
- A=arcatan, L=log, P=puissances, E=exp, S=sin et cos

Exemple

$\int x^2 \ln x\, dx$, $u'=x^2$ et $v=\ln x$, donc $u=x^3/3$ et $v'=1/x$

Ainsi $\int x^2 \ln x = [\ x^3/3.\ \ln x] - \int x^3/3.1/x\ dx = [\ x^3/3.\ \ln x] - 1/3\int x^2\ dx$

$\int x^2 \ln x = [\ x^3/3.\ \ln x] - [1/9\ x^3\ ]$

Astuce 6

Parfois quand l'expression à l'intérieur de l'intégrale n'est pas un produit, on prend u'=1

Exemple

$\int \ln x\, dx$, $u'=1$ et $v=\ln x$, donc $u=x$ et $v'=1/x$

Ainsi $\int \ln x = [\ x.\ \ln x] - \int 1\ dx = [\ x.\ \ln x] - [x]$

Astuce 6 (Classique Concours)

Si I_n est un suite d'intégrales, cad $I_n=\int f_n(t)dt$, pour trouver une relation entre I_n et I_{n+1}, on procède par intégration par partie dans I_{n+1}

Extrait Concours Intégrales de Wallis

$u' = \cos t \quad , \quad v = (\cos t)^n$

$u = \sin t \quad , \quad v' = n \cos t^{n-1} (\cos t)'$

$v' = -n \sin t \cos t^{n-1}$

$$I_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos t^{n+1}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t^n \, dt$$

$$= \left[\sin t \times \cos t^n\right]_0^{\pi/2} + n \int_0^{\pi} \sin^2 t \cos t^{n-1}\, dt$$

$$= n \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos t^{n-1}\, dt = n \int_0 \cos t^{n-1} - \cos t^{n+1}$$

$$\boxed{I_{n+1} = n (I_{n-1} - I_{n+1})}$$

7. Sommes de Riemann

Définition

Si f : [0,1] → IR continue, on pose

$$\mathbf{R_n(f)=(1/n).\ \Sigma\ f(k/n)}$$

Théorème

Si f : [0,1] → IR continue, alors

$$\mathbf{\lim R_n(f)=\int_0^1 f(t)\ dt}$$

Astuce

Si f : [0,1] → IR continue, quand on passe à la limite dans $R_n(f)$

- On factorise par 1/n (quand il ne figure pas dans la somme)
- $(1/n).\ \Sigma$ devient $\int$
- f(k/n) devient f(t)dt

$$R_n(f) = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n \text{ ou } n-1}} \boxed{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt$$

Exemples

- $S_n=\sum_{k=0}^{n} 1/(k+n) =\sum_{k=0}^{n} 1/n(k/n+1) =1/n\, .\sum_{k=0}^{n}1/(k/n+1) \to \int_0^1 1/(t+1)dt$

  $\int_0^1 1/(t+1)dt = [\ln (t+1)]_0^1 = \ln 2-\ln 1=\ln 2$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{k/n} \longrightarrow \int_0^1 e^t\, dt$$

$$n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+n^2} = \underbrace{n\times\frac{1}{n^2}}_{1/n}\sum\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \left[\arctan t\right]_0^1$$

$$= \pi/4$$