Mamouni My Ismail
Professeur Agrégé Docteur

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.net

Fiche de cours: Intégrales à Paramètres

I, J intervalles de $\mathbb{R}$

$$f: \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \quad , \quad F: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Théorèmes Généraux

Thm 1: Existence

$|f(x,t)| \leqslant g(t) \Rightarrow F(x)$ est bien définie (existe)

Thm 2: Passage à la limite

$a \in \overline{I}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x,t) < \infty \\ |f(x,t)| \leqslant g(t)) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \\ \text{Existence+Egalité} \end{array}$$

Thm 3: Continuité

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \times J \\ |f(x,t)| \leqslant g(t)) \end{array}\right. \Rightarrow F \text{ continue sur } I$$

Thm 4: Dérivée

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \times J \\ |f(x,t)| \leqslant g_0(t) \\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g_1(t)) \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} F \text{ classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \left(\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right)' = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Thm 5: Dérivée Nème

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \times J \\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant g_k(t)), k = 0,..,n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} F \text{ classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \\ \left(\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right)^{(k)} = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Thm 6: Dérivée Infini

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \times J \\ \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant g_k(t)), \forall k \in \mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} F \text{ classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \left(\displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right)^{(k)} = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

Astuces des Concours

Dans Thm 1, on peut fixer x et remplacer la condition de domination par $t \mapsto f(x,t)$ intégrable

Thm 2 et 3 permettent le calcul d'intégrale

Dans Thm 1, 2, 3,4, 5 et 6, les fonction dominantes ne dépendent pas de $x \in I$ et doivent être intégrables sur J

Thm 4, 5 et 6 permettent de résoudre des Équations différentielles

Quand J est un segment on peut s'en passer dans Thm 1, 3, 4, 5, 6 des condition de domination dans Thm 2 on peut la remplacer par $|f(x,t)| \leq M$

Dans Thm 3,4, 5 et 6 on peut remplacer les condition de domination sur tout I par des domination locales (par exemple sut tout compact de $[a,b] \subset I$ ou tout $[a,+\infty[\subset I$ ou tout $]-\infty,a] \subset I$)

Thèmes Classiques

Fonction Gamma

Transformée de Laplace

Transformée de Fourier