My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مَمُونِي مُولَاِي اسْمَاعِيل

MP

Intégration 3
Intégrales à paramètre

Les Classiques Concours

CNC	CCP	Mines	Centrales
2017, Math 1 2013, Math 1 2012, Math 1	2016, Math 1	2019, Math 2 2017, Math 1 2016, Math 2	2019, Math 2 2015, Math 1 et 2

Classique 1 : Fonction Gamma d'Euler
Classique 2 : Transformation de Laplace
Classique 3 : Transformation de Fourier
Classique 4 : Calcul de l'intégrale de Gauss

Classique 1 : Fonction Gamma d'Euler

On pose $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x>0$
2. Montrer que $\Gamma(x+1)=x.\Gamma(x)$ pour tout $x>0$
3. En déduire $\Gamma(n)=(n-1)\,!$ Pour tout $n\in IN^*$
4. Calculer $\Gamma(1/2)$
   Indication : Intégrale de Gauss
5. En déduire $\Gamma(n+1/2)$ Pour tout $n\in IN^*$
6. Monter que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
7. Donner $\Gamma^{(n)}(x)$ pour tout $x>0$ et $n\in IN^*$

Solution

1. pour $x>0$, fixé
   $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$
   Pour $t \to 0$: $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} = 1/t^\alpha$ avec $\alpha=1-x < 1$, donc il s'agit d'une intégrale de Riemann au voisinage de 0, de paramètre $\alpha=1-x < 1$, donc converge
   Pour $t \to +\infty$: $t^{x-1}e^{-t} = o(1/t^2)$, donc ….
2. $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$.
   Posons $u'=e^{-t}$, donc $u=-e^{-t}$ et $v=t^x$, donc $v'=x.t^{x-1}$
   $\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \lim_{A\to+\infty} [-t^x e^{-t}]_0^A + x\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)$
3. Par récurrence avec $\Gamma(n+1)=n.\Gamma(n)$
4. $\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty} e^{-t} / t^{1/2}\, dt$, on pose $u= t^{1/2}$, donc $t=u^2$ et $dt=2u.du$
   $\Gamma(1/2)=\int_0^{+\infty} e^{-t} / t^{1/2}\, dt = \int_0^{+\infty} (e^{-u°2} / u)2u.du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u°2}\, du=\pi^{1/2}$
5. $\Gamma(n+1/2)=\Gamma(n-1/2 +1)=(n-1/2)\Gamma(n-1/2)=(2n-1)/2 \,.\, \Gamma(n-1/2)$
   $\Gamma(n-1/2)=(2n-3)/2 \,.\, \Gamma(n-3/2)$
   ⋮
   $\Gamma(3/2)=\Gamma(1+1/2)=1/2.\ \Gamma(1/2) =1/2.\ \pi^{1/2}$
   $\Gamma(n+1/2) =[(2n-1)(2n-3) \ldots 1] / 2^n.\ \pi^{1/2}$
   $\Gamma(n+1/2) =[(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3) \ldots 2.1] / [(2n).2^n.\ \pi^{1/2}$

Classique 2: Transformée de Laplace

Soit f une fct causale : f continue tq $\exists$ M>0, tq $|f(t)|\leq M.e^{-ta}$ sur $[0,+\infty[$

On pose $Lf(x)=\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt$

1. Montrer que Lf(x) est bien définie pour tout x>0
2. Montrer que Lf(x) est continue sur $[0,+\infty[$
3. Montrer que Lf(x) est classe C^1 sur $[0,+\infty[$
   Avec $(Lf)'(x) = L(t.f)(x)$
4. En déduire que Lf(x) est classe C^∞ sur $[0,+\infty[$
   Avec $(Lf)^{(n)}(x) = L(t^n.f)(x)$
5. On suppose de plus que f est de classe C^1 et que f' causale
   Montrer que $L(f')(x) = -f(0) + x.\, Lf(x)$

Solution

1. Pour x fixé, $t \to f(t)\, e^{-tx}$ continue
   $|f(t)\, e^{-tx}| \leq g(t)=M.e^{-ta}$ car $e^{-tx}\leq 1$
   or g intégrable sur $[0,+\infty[$, donc d'après l'un des théorèmes généraux du cours des intégrales à paramètre L(f)(x) est bien définie
2. Pour x>0 fixé, $t \to f(t)\, e^{-tx}$ continue
   Pour t>0 fixé $x :\to f(t)\, e^{-tx}$ continue
   $|f(t)\, e^{-tx}| \leq g(t)=M.e^{-ta}$ car $e^{-tx}\leq 1$
   or g intégrable sur $[0,+\infty[$, donc d'après l'un des théorèmes généraux du cours des intégrales à paramètre, l'application $x \to Lf(x)$ est continue sur $[0,+\infty[$
3. Pour x>0 fixé, $t \to f(t)\, e^{-tx}$ continue
   Pour t>0 fixé $x \to f(t)\, e^{-tx}$ de classe C^1
   $|\partial (f(t)\, e^{-tx}) / \partial x| = |-t\, f(t)\, e^{-tx}| \leq te^{-at} = g(t) = o(1/t^2)$
   Ainsi g intégrable sur $[0,+\infty[$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on conclut que $x \to Lf(x)$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, avec
   $(Lf)'(x) = \partial \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt \;/\; \partial x = \int_0^{+\infty} \partial (f(t)\, e^{-tx}) / \partial x \; dt$
   $= -\int_0^{+\infty} tf(t)\, e^{-tx} dt$

4. Avec $(Lf)''(x)=[(Lf)']'(x)=[L(t.f)]'(x) = L(t^2.f)(x)$
5. $L(f')(x)=\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-tx}\, dt = \text{lm}_{A\to +\infty}\int_0^{A} f'(t)\, e^{-tx}\, dt$

   IPP : $u' = f'$ et $v= e^{-tx}$, donc $u=f$ et $v'=-x\, e^{-tx}$

   $\int_0^A f'(t)\, e^{-tx}\, dt = [f(t)e^{-tx}]_0^A + x \int_0^A f(t)\, e^{-tx}\, dt$

   $=f(A)e^{-tA} – f(0) + x\int_0^A f'(t)\, e^{-tx}\, dt$

   Or $|f(A)| \leq e^{-ta}$, donc $|f(A)e^{-tA}| \leq e^{-t(a+A)} \to 0$ quand $A\to +\infty$

   Ainsi $L(f')(x) = -f(0) + x. Lf(x)$

Classique 3 : Calul de l'Intégrale de Gauss

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt$ converge
   On pose $f(x,t) = \exp(-x(1+t^2)) / (1+t^2)$ et $F(x) = \int_0^1 f(x,t)\, dt$
2. Montrer que $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in IR$
3. Montrer que F est de classe C^1 sur IR
4. Donner $F'(x)$ pour tout $x \in IR$
5. On pose $G(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$
   Justifier que F est de classe C^1 sur IR et donner $G'(x)$
6. Montrer que la dérivée de $F(x^2) + G(x)^2$ est nulle
7. En déduire que $F(x^2) + G(x)^2 = \pi/4$
8. Montrer que $\lim F(x) = 0$ quand $x \to +\infty$
9. En déduire que $I = \pi^{1/2}/2$
10. Bonus
    1. Rappeler la densité d'une loi normale centrée réduite
    2. Montrer que son espérance vaut 0
    3. Montrer que sa variance vaut 1

Solution

1. car au voisinage de $+\infty$ $\exp(-t^2) = o(1/t^2)$
2. pour tout $x \in IR$ (fixé), on a
   $t \to f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f(x,t)\, dt$ converge en tant qu'intégrale d'une fct continue sur un segment
3. pour tout $x \in IR$ (fixé), on a
   $t \to f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ et $\int_0^1 f(x,t)\, dt$ converge en tant qu'intégrale d'une fct continue sur un segment
4. pour tout $t \in [0,1]$ (fixé), on a
   $x \to f(x,t)$ est classe C^1 sur IR en tant que composée de fct usuelles de classe C^1 sur IR avec
   $|\partial f(x,t) / \partial x| = \exp(-x(1+t^2)) \leq 1$ avec la fct cte=1 intégrable sur le segment $[0,1]$
   D'après le thm de dérivation sous le signe intégral, on conclut que $x \to F(x) = \int_0^1 f(x,t)\, dt$ est de classe C1 sur IR

5. $F'(x)=\partial/\partial x\ (\int_0^1 f(x,t)\ dt)=\int_0^1 \partial f(x,t)/\partial x\ dt=-\int_0^1 \exp(-x(1+t^2))dt$

6. $G(x) =\int_0^x \exp(-t^2)\ dt$ est de classe C^1 sur IR en tant que primitive de la fct continue $t \to \exp(-t^2)$
   Avec $G'(x)=\exp(-x^2)$
   $[F(x^2) + G(x)^2\ ]' = 2x.F'(x^2) + 2G'(x)G(x)$
   $= -2x\int_0^1 \exp(-x^2(1+t^2))dt + 2\exp(-x^2) \int_0^x \exp(- t^2)dt$
   $=-2\exp(-x^2)[\int_0^1 \exp(-x^2t^2)\ dt - \int_0^x \exp(- t^2)dt\ ]$(u=xt dans le 1er)
   $=-2\exp(-x^2)[\int_0^x \exp(-u^2)\ dt - \int_0^x \exp(- t^2)dt\ ] =0$
7. pour x=0 : $F(0) + G(0)^2 =\int_0^1 1/ (1+t^2)\ dt = \pi/4$
8. Pour x fixé, $t \to f(x,t)$ est continue sur [0,1] en tant que composée de fct usuelles continues sur [0,1] avec
   pour tout $t\in [0,1]$ (fixé), on a $\lim f(x,t) =0$ quand $x \to +\infty$
   Et $|f(x,t)\ | \leq 1$ avec la fct cte=1 intégrable sur le segment [0,1]
   D'après le thm de passage à la limite sous le signe intégral, on conclut que
   $\lim F(x)=\lim \int_0^1 f(x,t)\ dt = \lim \int_0^1 f(x,t)\ dt =0$ quand $x \to +\infty$
9. On a $F(x^2) + G(x)^2 = \pi/4$
   Avec $\lim F(x^2) =0$, $\lim G(x)= I$ quand quand $x \to +\infty$
   Donc $I^2 = \pi/4$, d'où $I = \pi^{1/2}/4$
10. Soon