

1 Convergence en probabilité.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que **la suite (X_n) converge en probabilité vers X** (et on note si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Pour montrer que $(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} k$ où k est une v.a.r. constante, on dispose de :

- Si (X_n) est une suite de v.a.r. indépendantes possédant une même espérance m et un même écart-type σ et si $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ est la $n^{\text{ème}}$ **moyenne empirique** des X_n , alors (F_n) converge en probabilité vers m (*Loi faible des grands nombres*);
- $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2}$ (*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*).
qui permet de conclure notamment si $(\forall n, \mathbb{E}(X_n) = k, \text{ et } \mathbb{V}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0)$;
- La définition de la convergence en probabilité :
si on peut calculer $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, on montre que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- La composition par une fonction **continue** : si $X_n = f(Y_n)$ et si on arrive à montrer que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} k$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} f(k)$
- Si X est **positive**,

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha} \quad (\text{Inégalité de Markov}).$$

Peut s'appliquer à une variable bien choisie : par exemple $X = (X_n - k)^2$ et $\alpha = \varepsilon^2$
donnent $\mathbb{P}(|X_n - k| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}((X_n - k)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X_n - k)^2)}{\varepsilon^2} \dots$

2 Convergence en loi.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X des v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que **la suite (X_n) converge en loi vers X** (et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$) si :

en tout réel x où F_X est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Pour montrer que $(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, on dispose de :

- La définition : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tout x où F_X est continue;
- Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et X sont discrètes et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$,
 $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$

où on peut remplacer éventuellement $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$;

3. Le théorème limite central :

- soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires **indépendantes, toutes de même loi, possédant une espérance m et un écart-type non nul σ**
- soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} S_n$ ($n^{\text{ème}}$ moyenne empirique)

Alors $\bar{X}_n^* = S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

Remarque technique : savoir jongler avec S_n^* et $\bar{X}_n^*$.

$$\mathbb{E}(S_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} nm, \mathbb{E}(\bar{X}_n) \stackrel{\text{lin.}}{=} m, \mathbb{V}(S_n) \stackrel{\text{indép.}}{=} n\sigma^2, \mathbb{V}(\bar{X}_n) \stackrel{\text{indép.}}{=} \frac{\sigma^2}{n},$$

$$\bar{X}_n^* = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sigma(\bar{X}_n)} = \frac{\bar{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{n\bar{X}_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} = S_n^*.$$

- La composition par une fonction **continue** : si $X_n = f(Y_n)$ et si on arrive à montrer que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} k$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} f(k)$
- Le théorème de SLUTSKY (*attention à la nature des convergences*) :

$$\left. \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \text{ (constante)} \\ Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cY \\ X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c + Y \end{array} \right.$$

6. Un cas très particulier : la loi de Poisson, limite de la loi binomiale.

Soit $\lambda > 0$. Toute suite $(X_n)_{n \geq \lambda}$ de v.a.r. de loi respective $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ converge en loi vers une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

- Une suite de v.a.r. à densité peut converger en loi vers une v.a.r. discrète.
- Une suite de v.a.r. discrètes peut converger en loi vers une v.a.r. à densité.
- La convergence en loi des v.a.r. à densité (X_n) vers une v.a.r. à densité X n'entraîne pas *a priori* la convergence des densités f_{X_n} vers f_X .

3 Approximations usuelles en probabilité.

Pour calculer des valeurs approchées de probabilités,

on peut :

- approcher $\mathcal{B}(n, p)$ par $\mathcal{P}(np)$ si $n \geq 30$ et $np \leq 10$;
- approcher $\mathcal{B}(n, p)$ par $\mathcal{N}(np; np(1-p))$ si $n \geq 20$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$;
- approcher $\mathcal{P}(\lambda)$ par $\mathcal{N}(\lambda; \lambda)$ si $\lambda \geq 10$.

Si l'on approche une loi discrète par une loi à densité, il convient d'effectuer la **correction de continuité**.