PRÉPAS ELBILIA
GROUPE ELBILIA · LÉON L'AFRICAIN
Prépas MP

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Probabilités à Densité

A savoir

- Je dois savoir répondre à la question « Montrer que f est une densité de probabilité. »(cf. théo 1)
- Si on me donne une VAR X dont je connais la densité f je dois savoir calculer sa fonction de répartition grâce à la formule : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$. (cf. exercice 1)
- Si je connais la fonction de répartition F d'une VAR X je dois savoir répondre à la question « Montrer que X est une VAR à densité et donner une densité de X. »(cf. théo 3)
- Si on me donne une fonction F, sans rien me dire de plus, je dois savoir répondre à la question « Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et donner une densité de X. »(cf. théo 4)
  La différence avec le point d'avant est qu'ici on ne sait pas déjà que F est une fonction de répartition.
- Je dois savoir rapidement faire le lien entre des calculs de probabilités, la densité et la fonction de répartition. Soit X une VAR de densité f et de fonction de répartition F :

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R},&\quad P(X = a) = 0\\
\forall a \in \mathbb{R},&\quad P(X \leqslant a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt\\
\forall a \in \mathbb{R},&\quad P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt = \int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt\\
\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,&\quad P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\ dt
\end{aligned}$$

la formule est aussi valable avec des inégalités strictes

- Je dois connaitre la définition de l'indépendance de VAR à densité (cf. définition 2)
- Je dois connaitre la définition de l'espérance, du moment d'ordre r, et de la variance d'une VAR à densité (cf. définitions 3, 5 et 6) et je dois savoir les reconnaitre dans un exercice pour utiliser les variables usuelles (cf. exercice 14).
- Je dois connaitre les propriétés de l'espérance : théorème de transfert, linéarité, ...
- Je dois savoir construire la variable centrée réduite associée à n'importe quelle variable aléatoire X. On la note X^* :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- Lois usuelles :

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a;b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

- Je dois savoir bien manipuler la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : formule $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ et savoir lire le tableau de valeur de Φ.
- Je dois savoir que si X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors X^* suit la loi normale centrée réduite.
- Si on me donne une VAR X je dois savoir trouver la fonction de répartition d'une VAR Y qui s'exprime en fonction de X (par exemple $2X - 1$, X^2, e^X, ...)